

РОЗРОБЛЕННЯ БАГАТОМАСШТАБНОЇ ГІБРИДНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БЕЗПЕЧНОГО КОЛЕКТИВНОГО РУХУ СУПЕРРОЇВ З ОПТИМІЗАЦІЄЮ МАРШРУТІВ

В.Ю. Корольов, О.А. Куліш, М.І. Огурцов, О.М. Ходзінський *, О.О. Ярушевський

ORCID: [0000-0003-1143-5846](https://orcid.org/0000-0003-1143-5846), [0009-0002-4878-0299](https://orcid.org/0009-0002-4878-0299), [0000-0002-6167-5111](https://orcid.org/0000-0002-6167-5111), [0000-0003-4574-3628](https://orcid.org/0000-0003-4574-3628), [0009-0004-9930-1643](https://orcid.org/0009-0004-9930-1643)

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ

* Листування: okhodz@gmail.com

Open Access under [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) License

UDC 004.896 : 519.876.5

Development of a Multi-Scale Hybrid Mathematical Model of Safe Collective Movement of Swarms with Route Optimization

Vyacheslav Korolyov, Oleksii Kulish, Maxim Ogurtsov, Oleksandr Khodzinskiy *, Oleksandr Yarushevskiy

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv

* Correspondence: okhodz@gmail.com

Introduction. This paper addresses the problem of mathematical and computational modeling of large-scale swarms of agents, which is characteristic of both natural systems (such as insect swarms and animal groups) and engineering applications in robotics and autonomous multi-agent systems. It is shown that classical Lagrangian agent-based models become computationally intractable for swarms consisting of tens or hundreds of thousands of agents, while purely Eulerian continuum approaches are unable to adequately capture individual-level effects that are critical for swarm dynamics.

The purpose of the work is to overcome these limitations, a formally consistent multiscale hybrid mathematical model is proposed, which integrates Eulerian (continuum) and Lagrangian (agent-based) descriptions into a single closed framework.

Results. The bulk of the swarm is described by a system of hydrodynamic equations governing density, velocity, and energy fields, whereas a limited subset of agents is modeled individually using ordinary differential equations that explicitly incorporate local continuum fields. A rigorous bidirectional coupling mechanism between the two scales is introduced, ensuring consistent exchange of mass, momentum, and energy, as well as dynamic transitions of agents between the Eulerian and Lagrangian representations depending on local conditions. Particular attention is paid to energy constraints, scaling effects, and the emergence of stable collective motion along a prescribed trajectory.

The numerical examples for models and simulation verifications are presented.

Conclusions. The proposed approach provides a mathematically grounded and computationally efficient foundation for the numerical investigation of large swarms scalable to tens and hundreds of thousands of agents. It is applicable to both biological swarm analysis and the development of control algorithms for large-scale robotic swarm.

Keywords: swarm modeling, multiscale hybrid models, Eulerian-Lagrangian coupling, agent-based modeling, continuum swarm dynamics, collective motion, active matter, large-scale swarms, computational swarm dynamics, swarm robotics.

Анотація

Вступ. У роботі розглянуто проблему математичного та комп'ютерного моделювання великих роїв агентів, характерних як для природних систем (роїв комах, зграй тварин), так і для інженерних застосувань у робототехніці й автономних багатоагентних системах. Показано, що класичні лагранжеві агентні моделі є обчислювально надто складними для опису роїв, які налічують десятки та сотні тисяч агентів, тоді як ейлерівські континуальні підходи не забезпечують коректного відтворення індивідуальних ефектів, критично важливих для динаміки рою.

Мета роботи. Для подолання цих обмежень запропоновано формальну багатомасштабну гібридну математичну модель, яка узгоджено поєднує ейлерівський (континуальний) та лагранжевий (агентно-орієнтований) підходи в єдиній замкненій системі рівнянь.

Результати. Основну масу суперрою описано системою гідродинамічних рівнянь для густини, швидкості та енергії, тоді як обмежену підмножину агентів моделюють індивідуально за допомогою звичайних диференціальних рівнянь з урахуванням локальних полів континууму. Запропоновано новий фіксований двосторонній механізм зв'язування масштабів, якщо забезпечує коректний обмін масою, імпульсом та енергією між рівнями моделі, а також динамічне перемикавання агентів між лагранжевим і ейлерівським описом залежно від локальних умов. Окрему увагу приділено моделюванню енергетичних обмежень, ефектів масштабування та стійкого колективного руху рою вздовж заданої траєкторії.

Висновки Запропонований підхід формує математично обґрунтовану та обчислювально реалізовану основу для чисельного дослідження великих роїв, масштабованих до десятків і сотень тисяч агентів, і може бути використаний як у біологічних дослідженнях, так і під час розроблення алгоритмів керування роями автономних роботів.

Ключові слова: моделювання роїв, багатомасштабні гібридні моделі, ейлерівсько-лагранжеве зв'язування, агентне моделювання, континуальна динаміка рою, колективний рух, активна матерія, великі рої, обчислювальна динаміка роїв, ройова робототехніка.

Вступ. Природні системи, такі як косяки риб, великі зграї птахів чи рої комах, демонструють складну колективну поведінку, яку можна використати при створенні роїв штучних роботів. Кількість особин у таких колективах може варіюватись від тисяч до трильйонів, особливо у випадку інсектних суперроїв [1 – 4]. У сучасних технічних системах математичні моделі великих роїв застосовується для опису поведінки молекулярних роботів у нанотехнологіях [3], а також великих груп безпілотних апаратів [5] і рухомих роботизованих систем [1 – 6]. Принципи роїв застосовуються навіть у магнітних мікророботах для виконання складних завдань [2 – 4, 7]. Керування такими величезними колективами має гібридний і переважно децентралізований характер та базується на простих правилах взаємодії агентів [8 – 14].

Рациональність такого підходу підтверджується дослідженнями, присвяченим оцінюванню математичних моделей руху автономних груп агентів [15]. Для роїв безпілотних апаратів, що функціонують у складних умовах, розробляються алгоритми комплементарної колаборації [5]. Молекулярні ройові роботи формують потребу у створенні спеціального класу алгоритмів для нанотехнологій [1].

У низці сучасних наукових досліджень для опису поведінки великого рою (суперрою) використовуються кілька (переважно дві або три) різних математичних моделей [10, 16 – 19]. Такий підхід отримав назву багатомасштабного моделювання (multiscale modeling) або гібридного моделювання роїв агентів. Він активно використовується під час вивчення масштабної колективної поведінки агентів та активної матерії, оскільки забезпечує можливість оперативної перевірки наукових гіпотез і підтвердження отриманих результатів. Багатомасштабний підхід, у якому поєднуються кілька математичних моделей різних рівнів деталізації, фактично став стандартом аналізу та синтезу поведінки великих роїв.

Він дає змогу досліджувати як мікроскопічну динаміку окремих агентів, так і макроскопічні властивості рою як суцільного середовища. Важливою науковою проблемою є визначення максимально можливого розміру рою та методів керування ним відповідно до наявних обчислювальних і комунікаційних ресурсів. Розмір рою залежить від фізичних обмежень, затримок і пропускної здатності каналів зв'язку, енергетичних ресурсів, стабільності колективної поведінки та обчислювальних характеристик моделі. Оцінювання максимально можливого розміру рою як у теоретичному, так і в практичному аспектах є складним завданням, оскільки цей параметр безпосередньо залежить від цілей створення рою, архітектури його керування та особливостей середовища функціонування [17 – 20]. Абсолютного значення «максимальної кількості» агентів у рої не існує, оскільки його розмір

обмежується низкою фізичних і обчислювальних чинників, які визначають реальні можливості реалізації таких систем.

З теоретичного погляду континуальні моделі, зокрема, моделі щільності та кінетичні моделі, дають змогу розглядати рій як систему з нескінченною кількістю агентів [17 – 22]. Проте в реальних умовах розмір рою обмежується кількома ключовими факторами [18 – 22].

По-перше, це сенсорні обмеження та перешкоди у зв'язку. У роях, де агенти взаємодіють лише з найближчими сусідами, радіус зв'язку обмежує щільність розміщення агентів, а зі значним збільшенням їхньої кількості виникають затримки передавання інформації та перенавантаження бездротових каналів, що призводить до інтерференції та колізій і, як наслідок, до обмеження загальної кількості агентів [1, 4 – 6, 9, 10, 19, 23, 24]. Крім того, це потребує розроблення спеціалізованих алгоритмів локального позиціонування [17] та відносного позиціонування в умовах обмеженої GPS-доступності [9].

По-друге, існують обмеження енергетичних та матеріальних ресурсів. Реальні рої не можуть збільшуватися необмежено через кінцевість таких ресурсів, як , матеріали або просторові можливості [15, 19, 20, 23, 25, 26]. Активація/зліт великої кількості агентів також потребує певного часу, що накладає додаткові обмеження. Важливим обмежувальним чинником є також «енергетична щільність» рою [15, 16, 19, 20], тобто співвідношення кінетичної енергії до кількості агентів, яке враховує витрати на комунікацію між агентами та уникнення зіткнень між агентами або перешкодами руху [2, 15, 16].

По-третє, суттєвий вплив має масштабування системи. Із зростанням розміру рою збільшується ймовірність виникнення колективних помилок або помилок поширення, спричинених шумом [11, 12, 14, 19], що робить великі рої ($N \approx 10^5 \div 10^6$) менш надійними на одного агента порівняно з меншими системами, якщо не застосовується високорівневий контроль [14]. Кількість агентів в об'єкті дослідження робить багатомасштабне математичне моделювання суперроїв важливим інструментом отримання нових знань як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерній практиці.

Прикладні дослідження роїв та індустрія розваг використовують різні підходи до реалізації поставлених завдань. Для масових заходів, зокрема світлових шоу з використанням дронів, керування роями до 10 000 одиниць у контрольованому середовищі з високорівневим централізованим керуванням (high-level centralized control) [12, 17 – 19, 24, 27] є стандартною практикою. У лабораторних умовах найбільші рої наземних роботів, керовані за допомогою кінетичних моделей, зазвичай обмежуються 1000–5000 одиницями через вартісні та логістичні обмеження, а також складність відстеження кожного агента [7, 12, 20, 28, 29].

Комп'ютерні симуляції також мають обмеження – приблизно до 100 000 окремих об'єктів, що зумовлено вартістю використання обчислювальних серверів [4, 12, 13, 30, 31]. Отже, у разі застосування високорівневого централізованого керування практичний максимум розміру рою обмежується приблизно 10 000 агентів, тоді як децентралізовані стохастичні системи, що моделюються континуальними рівняннями, теоретично можуть досягати чисельності в мільйони і навіть більше агентів [4, 7, 12, 13, 20, 26, 30 – 32].

Огляд існуючих математичних моделей суперроїв

Відомі два основні підходи до моделювання поведінки великих груп роботів, які описуються термінами «**ройова робототехніка на основі щільності**» (*Density-Based Swarm Robotics*) [17, 19, 33 – 37] та «**кінетичне ройове керування**» (*Kinetic Swarm Control*) [4, 6, 12, 13, 32]. Вони представляють різні підходи до моделювання та керування поведінкою великих груп роботів, об'єднаних у рій. Хоча обидва підходи спрямовані на організацію колективної поведінки, вони базуються на принципово різних концепціях: перший зосереджується на просторовому розподілі агентів, тоді як другий акцентує увагу на динамічних та енергетичних характеристиках рою.

Ройова робототехніка на основі щільності ґрунтується на концепції просторового розподілу роботів усередині рою, де основною характеристикою виступає щільність [7, 12, 20]. Основна ідея

цього підходу полягає у тому, що поведінка окремих роботів визначається їхньою локальною оцінкою щільності рою в безпосередньому оточенні. Роботи використовують прості локальні правила [7, 26, 28], щоб переміщатися з областей із високою щільністю до областей з низькою щільністю або навпаки, формуючи таким чином бажаний просторовий розподіл. Цей підхід є особливо ефективний для завдань, що потребують рівномірного покриття території, формування певних просторових структур, пошуку джерел випромінювання або розподіленого зондування, де критично важливою є концентрація роботів у визначених точках простору [17, 24, 32 – 34, 36]. Моделювання в цьому випадку часто здійснюється за допомогою **ейлерового підходу**, за якого рій розглядається як безперервне поле щільності, що дає змогу застосовувати методи гідродинаміки та статистичної фізики [12, 17, 36, 38, 39].

Кінетичне ройове керування, також відоме як **енергетичне ройове керування**, зосереджується на динамічних та **енергетичних властивостях рою**, таких як швидкість і внутрішня **кінетична енергія** ("температура"). У межах цього підходу рій розглядається як сукупність частинок (роботів), кожна з яких має масу, положення та швидкість [12, 38, 39]. Керуючі впливи у кінетичному ройовому керуванні спрямовані на зміну внутрішньої кінетичної енергії, або "температури" рою з метою впливу на його динаміку та ефективність виконання завдань [19, 20, 39]. Алгоритми контролю рухом рою, зокрема для децентралізованих систем, що налічують тисячі агентів, розробляються для керування центром мас рою та його внутрішнім рухом [24, 25, 40, 41], включаючи методи оптимізації групового руху в моделях локально-центричної навігації [8] та використовуючи механізми притягання/відштовхування та гальмування/прискорення швидкості руху [19, 38, 42]. Підвищення "температури" рою призводить до активнішого і швидкого руху та збільшення області покриття. Цей підхід особливо корисний для завдань, що вимагають активного та ефективного переміщення рою заданою траєкторією, швидкого покриття території, пошуку та моніторингу [28, 34, 35], а також для контролю згуртованості та розміру рою [6, 9, 10, 16]. Останні дослідження також охоплюють планування траєкторій руху багатьох роботів на основі дифузійних моделей для складних середовищ [39, 42, 43].

Моделювання в межах цього спирається на принципи статистичної фізики та кінетичної теорії і часто використовуючи **лагранжев підхід** [12, 13, 32, 36], у якому враховуються швидкості та прискорення **окремих агентів** [6, 15, 21, 22]. Лагранжів підхід є фундаментальним методом моделювання в механіці та фізиці, який у контексті великомасштабних роїв роботів або активної матерії фокусується на **індивідуальному русі** кожного агента. Перевагами цього підходу є висока точність і деталізація, оскільки він дає змогу моделювати **дискретні події** (зіткнення, поломки) [22, 38, 44] та **різну динаміку** для **кожного агента**. Недоліками є **погана масштабованість**, оскільки обчислювальна складність зростає пропорційно $O(N)$ або $O(N^2)$ у разі повної взаємодії між агентами, що робить

лагранжів підхід **непридатним** для $N > 10^5$ [7, 17, 18, 20, 30].

Ключова відмінність між двома розглянутими підходами полягає у тому, що **ройова робото-техніка на основі щільності** [7, 20] зосереджується на розташуванні, тобто на стаціонарному або повільно змінному просторовому розподілі, тоді як **кінетичне ройове керування** аналізує характер їх руху та енергетичні характеристики, тобто динамічні властивості системи [12, 13, 22, 32, 38]. Таким чином, перший підхід акцентує увагу на просторовій організації рою, а другий – на його динамічних характеристиках та енергетичній ефективності [12, 17 – 19].

Ейлерові континуальні моделі щільності

У межах цього підходу рій розглядається як поле щільності $\rho(\mathbf{x}, t)$ [25, 27, 28, 31]. Основним рівнянням є рівняння неперервності [7, 12, 20, 32]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{v}),$$

де $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – середня швидкість агентів. Швидкість визначається як функція локальних градієнтів щільності або різниці між поточною та бажаною щільністю. Типовий приклад має вигляд:

$$\mathbf{v} = -K \nabla (\rho - \rho_{desired}) .$$

Перевагами такого підходу є масштабованість, можливість моделювання роїв розміром $10^6 \div 10^{12}$ агентів [7, 12, 20, 25, 32], а недоліками є втрата можливості аналізу індивідуальних дій і станів агентів та їхнього впливу на сусідів, а також складність урахування індивідуальних збоїв [12, 17, 18, 30].

Лагранжеві агентні моделі

Лагранжів підхід є фундаментальним методом моделювання в механіці та фізиці [12, 13, 21], який у контексті великомасштабних роїв роботів чи активної матерії фокусується на **індивідуальному русі** кожного агента. В моделюванні суперроїв лагранжів підхід протиставляється ейлеровому (континуальному) підходу [13, 20, 25, 45], де моделюється поле щільності. Лагранжів підхід передбачає використання системи координат, що рухається разом із частинкою (роботом).

За лагранжевим підходом поведінка кожного агента описується окремо. Для i -го робота:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{f}_i - \gamma \mathbf{v}_i,$$

де $\mathbf{u}_i$ – керуючий сигнал, $\mathbf{f}_i$ – сили взаємодії, γ – коефіцієнт гальмування.

Динаміка окремого агента у лагранжевій моделі. У цьому підході, динаміка кожного i -го робота описується відповідно до принципів класичної механіки або кінематики. Для рою з N агентів необхідно розв'язати N систем диференціальних рівнянь [13, 21, 27]:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i / m_i,$$

де $\mathbf{F}_i$ – сума всіх сил, що діють на i -го агента.

Лагранжів підхід часто використовується для реалізації моделей, натхнених теоріями статистичної фізики та кінетичної теорії [13, 21, 32].

Кінетична теорія

Індивідуальні агенти моделюються як **частинки**, що мають масу та взаємодіють між собою. Формально така взаємодія описується кінетичними рівняннями типу Больцмана та їх дискретними аналогами [12, 13, 26, 32, 43]. Наприклад, сила $\mathbf{F}_i$ може бути подана у вигляді:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{drive} + \mathbf{F}_{cohesion} + \mathbf{F}_{repulsion} + \mathbf{F}_{align} + \mathbf{F}_{noise},$$

де $\mathbf{F}_{cohesion}$ (сила тяжіння між агентами) та $\mathbf{F}_{repulsion}$ (сила відштовхування) – це **локальні сили взаємодії**, що залежать від положення та швидкості **сусідніх** агентів $j \in N_i$.

Врахування швидкостей або прискорень

Керування на основі швидкостей (перший порядок): агент безпосередньо встановлює бажану швидкість $\mathbf{v}_i$ на основі локальних правил, як у класичній моделі Вішека [13, 21, 43].

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_{neighbors}) + \mathbf{w}_i.$$

У керуванні на основі прискорення/сил (другий порядок) агент реагує на сили, що спричиняють прискорення. Такий підхід є більш реалістичним для фізичних дронів/роботів [12, 21, 27].

Для моделювання роїв із $N > 10^5$ лагранжів підхід часто використовується лише як базовий еталон для калібрування та валідації значно швидших континуальних (ейлерових) моделей [12, 13, 30, 32].

Приклад багаторівневої агентної моделі для суперроїв (Agent-Based Models for Large Swarms) без оптимізації

Хоча континуальні моделі є найбільш ефективними при $N \rightarrow \infty$, агентні моделі можуть застосовуватися для N до кількох десятків тисяч ($N \leq 10^4$) на потужних обчислювальних кластерах або з використанням методів оптимізації. Для кращого розуміння процесів керування такі моделі доцільно розділяти на окремі рівні [12, 17, 19, 30]. Прикладом такого підходу є багаторівнева **модель локальної взаємодії (Local Interaction Models)** [17, 20, 41], відповідно до якої кожен агент моделюється індивідуально і взаємодіє лише з найближчими сусідами. До цієї моделі входять дві підлеглі моделі нижчого рівня:

1. **Модель Вішека (Vicsek Model)** [19, 21, 43] є базовою моделлю, відповідно до якої агенти прагнуть вирівняти свою орієнтацію у просторі із середньою орієнтацією сусідів, включаючи шум.

2. **Моделі притягання-відштовхування-орієнтації (Attraction-Repulsion-Alignment – A/R/A)** використовують три зони взаємодії навколо агента для забезпечення згуртованості та уникнення зіткнень [12, 21, 22].

Моделі A/R/A – це класичний приклад лагранжевого підходу [12, 21, 22], де поведінка кожного агента визначається геометричними зонами навколо нього. Ця модель дає змогу імітувати складну колективну поведінку, наприклад, зграї птахів або косяки риб за допомогою простих локальних правил.

Математичне подання

У лагранжевому моделюванні оновлення швидкості агента часто записують як суму векторів, що відповідають різним типам взаємодії [12, 19]:

$$\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{w}_r \mathbf{V}_{rep} + \mathbf{w}_a \mathbf{V}_{ali} + \mathbf{w}_{at} \mathbf{V}_{att} + \epsilon,$$

де $\mathbf{w}$ – вагові коефіцієнти, що визначають наскільки сильно кожна зона впливає на результат, ϵ – стохастичний шум (випадкові коливання).

Для запобігання розпаду рою на окремі групи при великій кількості агентів необхідно правильно вибрати радіуси геометричних зон A/R/A (відштовхування/вирівнювання/тягіння) за правилами [21, 22]:

$$R_{repulsion} < R_{alignment} < R_{attraction}, \quad R_{attraction} > L \cdot \sqrt{\frac{\ln N}{N}},$$

де L – розмір області.

У низці сучасних наукових праць [10, 28, 31, 32, 45] для моделювання одного й того самого великого рою застосовують декілька (зазвичай дві або три) різних математичних моделей. Цей підхід називають багатомасштабним моделюванням (multiscale modeling) або гібридним моделюванням. На відміну від класичних підходів типу mean-field, у яких великі рої моделюються виключно за допомогою континуальних описів, незалежних від індивідуальної динаміки агентів, як це систематизовано в огляді Еламважуті та Бермана [20], що зосереджується на масштабованих макроскопічних законах керування для задач покриття та розподілу завдань, у запропонованій роботі передбачається введення двостороннього зв'язку між лагранжевим та ейлеровим поданнями. Такий підхід забезпечить явне моделювання локалізованих ефектів індивідуальних агентів і динамічних переходів між масштабами опису. Цей підхід буде детально описаний далі.

Частково централізовані mean-field ігри пропонують альтернативний гібридний підхід [4, 33]. Крім того, хоча в роботі [28], застосовуються стратегії керування макростаном на основі модельно-прогнозних методів, придатні для великих значень N , у цих підходах не враховуються індивідуальна поведінка агентів та динамічний перерозподіл обчислювальних ресурсів. Поєднання mean-field підходів із навчанням з підкріпленням відкриває нові можливості для масштабованого контролю [13, 31, 46]. Mean-field-підходи успішно поєднуються із навчанням з підкріпленням у багатоагентних системах [45]. На відміну від зазначених робіт, запропонований багатомасштабний оптимізаційний підхід розширює класичний підхід PDE-обмеженої оптимізації [31], розвиваючи ідеї багаторівневої оптимізації безпечного руху роїв [10] шляхом одночасної оптимізації вибору масштабу опису та енергетичних характеристик системи на макро- та мікрорівнях. Наскільки відомо авторам, такий підхід досі не був предметом систематичного дослідження в наявній науковій літературі.

Багатомасштабна лагранжево-ейлерівська математична модель суперрою

Запропонована багатомасштабна (гібридна) модель ґрунтується на поєднанні ейлерівського та лагранжевого підходів з метою забезпечення обчислювальної масштабованості при збереженні критично важливих індивідуальних впливів агентів. Особливістю моделі є двосторонній зв'язок між ейлерівським та лагранжевим рівнями. Континуальні поля визначають локальні умови руху окремих агентів, впливаючи на їхню швидкість, напрямок руху та енергетичні витрати, тоді як індивідуальна динаміка агентів формує внесок у густину, імпульс та енергію континуального опису. Такий узгоджений обмін інформацією забезпечує цілісність багатомасштабної моделі та дає змогу відтворювати стійкий колективний рух рою при значній кількості агентів без втрати ключових мікроскопічних ефектів [38].

Ейлерівський (макроскопічний) рівень (континуальна модель)

Нехай $\rho(x,t)$ – густина агентів, $u(x,t)$ – середнє поле швидкості, $e(x,t)$ – середня енергія агентів. Тоді рівняння неперервності (з втратами/поповненням) має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = -\Lambda(\rho, e) + S_{Lag \rightarrow Eul},$$

де $\Lambda(\rho, e)$ – інтенсивність вибування агентів (втома, вихід із системи, посадка), $S_{Lag \rightarrow Eul}$ – внесок від лагранжевих агентів, що повертаються до загальної густини. Рівняння імпульсу (гідродинаміка рою) у формулюванні Топер-Ту / Cucker–Smale [30, 31, 32] має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla P(\rho) + \alpha(U(\rho) - |u|^2)u - \nabla(K * \rho) + F_{Lag},$$

де $P(\rho)$ – тиск (запобігання надмірній щільності), $K * \rho$ – нелокальна взаємодія (притягання-відштовхування), $U(\rho)$ – бажана швидкість рою, F_{Lag} – середній вплив лагранжевих агентів.

Енергетичне рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \nabla e = -\beta |u|^2 + G(x) - \Gamma(e),$$

де $\beta |u|^2$ – витрати енергії на рух, $G(x)$ – надходження енергії (заправка/зарядка), $\Gamma(e)$ – втрата енергії.

Лагранжевий рівень (агентна модель)

Розглянемо підмножину агентів: $i \in I_{Lag}, |I_{Lag}| \ll N$.

Рух кожного агента описується системою рівнянь

$$\dot{x}_i = v_i$$

$$\dot{v}_i = F_{\text{soc}}(x_i, v_i, \rho, u) + F_{\text{noise}} + F_{\text{ctrl}},$$

де соціальна сила

$$F_{\text{soc}} = -\nabla(K * \rho)(x_i) + \gamma(u(x_i) - v_i),$$

враховує прагнення агента рухатися разом з полем рою.

Енергія агента

$$\dot{E}_i = -\beta |v_i|^2 + G(x_i),$$

Якщо $E_i < E_{\min} \Rightarrow$ агент вибуває зі складу рою.

Оператор зв'язку між масштабами

Розглянемо механізм організації зв'язку між масштабами рою. Передача інформації з ейлерівського рівня на лагранжевий.

Лагранжеві агенти зчитують: $\rho(x_i, t), u(x_i, t), \nabla \rho(x_i, t)$ шляхом інтерполяції.

Передача інформації з лагранжевого рівня на ейлерівський. Лагранжеві агенти впливають на поля через згладжені джерела:

$$F_{\text{Lag}}(x, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}_{\text{Lag}}} w_i \phi_\varepsilon(x - x_i)(v_i - u)$$

$$S_{\text{Lag} \rightarrow \text{Eul}} = \sum_{i \in \mathcal{I}_{\text{Lag}}} \phi_\varepsilon(x - x_i),$$

де ϕ_ε – ядро згладжування.

Динамічне перемикання масштабів

Для забезпечення функціонування суперрою передбачається динамічне перемикання масштабів згідно визначених критеріїв.

Критерій перемикання з ейлерівського рівня на лагранжевий

Агент виділяється з континууму, якщо: $\rho(x, t) < \rho_{\min}$ або $e(x, t) < e_{\min}$.

Критерій переходу з лагранжевого масштабу на ейлерівський

Якщо агент знову стабільний: $E_i > E_{\text{merge}}$ і $|v_i - u| < \delta$, тоді він доєднується до поля ρ, u, e .

В результаті формується єдина замкнена багатомасштабна система:

$$\text{Eulerian PDE} \leftrightarrow \text{Coupling operators} \leftrightarrow \text{Lagrangian ODE/SDE}.$$

Тобто результатом застосування цього підходу є узгоджена масштабно-інваріантна модель для $N \sim 10^6$.

Оптимізаційна форма базової багатомасштабної моделі

У поточному вигляді модель описує еволюцію континуальних полів, зокрема густини, швидкості та енергії (ρ, v, E) , рух підмножини лагранжевих агентів з індивідуальними координатами, швидкостями та енергетичними змінними (x_i, v_i, e_i) , а також правила динамічного перемикання між різними масштабами опису. Таку багатомасштабну динаміку можна переписати як задачу знаходження траєкторії системи у просторі станів, яка мінімізує певний інтегральний функціонал за умови виконання обмежень у вигляді рівнянь у частинних та звичайних похідних. Формально це відповідає оптимізаційній постановці вигляду

$$\min_{\mathcal{U}(t), \chi(t)} \mathcal{J} \quad \text{за умови} \quad \mathcal{F}_{\text{Euler}} = 0, \mathcal{F}_{\text{Lag}} = 0,$$

де динаміка ейлерівського та лагранжевого рівнів розглядається як система жорстких обмежень.

Змінні оптимізації

У межах оптимізаційної постановки оптимізуються не індивідуальні агенти безпосередньо, а просторово-часові поля керування. До параметрів макроскопічного рівня належать параметри згладжування взаємодій $V(x, t)$, ефективна в'язкість або дисипація $\nu(x, t)$, а також локальні параметри соціальної взаємодії, що визначають колективну поведінку системи. Окрему роль відіграє масштабна змінна $\chi(x, t)$, яка виступає індикатором типу опису: при $\chi = 1$ використовується агентно-орієнтований лагранжевий підхід, тоді як при $\chi = 0$ застосовується континуальний ейлерівський опис. Принципово важливим є те, що в запропонованій постановці оптимізується саме просторово-часовий розподіл масштабів моделювання, а не лише кінематика руху.

Цільовий функціонал

Відповідно до вимог щодо підвищення швидкості моделювання доцільно обирати цільовий функціонал у вигляді

$$\mathcal{J} = \int_0^T \int_{\Omega} E(x, t) dx dt + \lambda_1 \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 dx dt + \lambda_2 \int_0^T K(t) dt,$$

де член $\int_0^T \int_{\Omega} E(x, t) dx dt$ – відповідає за енергію рою, $\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 dx dt$ – враховує нестабільність рою, $\int_0^T K(t) dt$ – оцінює кількість агентів, величина $K(t) = \int_{\Omega} \chi(x, t) dx$ визначає поточну кількість

лагранжевих агентів, λ_1 і λ_2 – коефіцієнти релаксації функціоналу. Така форма функціонала безпосередньо спрямована на мінімізацію обчислювальної складності за рахунок уникнення надмірної деталізації агентного рівня.

Обмеження оптимізації (constraints)

Ейлерівський рівень (PDE-constrained)

На макроскопічному рівні оптимізаційна задача підпорядковується системі рівнянь у частинних похідних, які описують збереження маси, імпульсу та енергії з урахуванням членів, залежних від масштабної змінної:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = S_{\rho}(\chi),$$

$$\partial_t (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = -\nabla p + \nabla \cdot (\nu \nabla v) + F(\rho),$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot (E v) = -D(E) + S_E(\chi).$$

Лагранжевий рівень (ODE)

На мікроскопічному рівні динаміка описується системою звичайних диференціальних рівнянь для координат, швидкостей та енергетичних змінних агентів:

$$\dot{x}_i = v_i, \dot{v}_i = f_{cont} + f_{local}, \dot{e}_i = -\Phi_i,$$

які активуються лише для тих агентів, для яких $\chi_i = 1$.

Прискорення моделювання досягається, по-перше, за рахунок оптимізації масштабної змінної $\chi(x, t)$, яка автоматично мінімізує кількість лагранжевих агентів без використання евристичних порогів. По-друге, застосування adjoint-методів дозволяє обчислювати градієнти цільового функціонала незалежно від загальної кількості агентів N , що зводить процес налаштування до десятків ітерацій замість тисяч. По-третє, адаптивне згущення сітки інтегрується безпосередньо в оптимізаційний процес і активується лише в тих областях простору, де це передбачено оптимальним розв'язком [25, 33, 34]. У межах запропонованої постановки недоцільно оптимізувати індивідуальні траєкторії кожного агента, оскільки це призводить до втрати масштабованості.

З метою валідації було виконано комп'ютерну симуляцію базової багатомасштабної ейлерівсько-лагранжевої моделі суперрою, що виявила проблему втрати маси агентів. Моделювання виконувалося для роїв до 10^4 агентів в одновимірному просторі за умови фіксованої повної маси M_0 .

Опис комп'ютерної симуляції

В симуляції було реалізовано запропоновану інноваційну гібридну лагранжево-ейлерівську модель багатомасштабного моделювання динаміки великих роїв. Модель поєднує континуальний опис (рівень Ейлера) із дискретним агенто-орієнтованим моделюванням (рівень Лагранжа), що дозволяє ефективно моделювати системи з ефективною чисельністю $\sim 10^4$ - 10^6 елементів при обмеженій кількості агентів, які безпосередньо обчислюються ($\sim 10^3$). Симуляція реалізована у повністю детермінованому CPU-режимі із суворими обмеженнями на чисельну стабільність та збереження фізичних параметрів суперрою [29, 37 – 39].

Модель включає динамічні переходи між масштабами, за якими області з низькою густиною автоматично переводяться у дискретне подання, тоді як стабілізовані агенти в областях високої густини повторно інтегруються в континуум [18].

Система диференціальних рівнянь на ейлерівському рівні включає рівняння неперервності, рівняння імпульсу в наближенні середнього поля та рівняння балансу енергії, розв'язувані методом скінченних різниць на сітці 128×128 [46]. На лагранжевому рівні кожний агент характеризується положенням, швидкістю та індивідуальною енергією, а його динаміка включає вирівнювання із локальним континуальним полем швидкості, реакцію на градієнти густини та енергетичні витрати руху.

Результати 1000 кроків симуляції з часовим кроком $\Delta t = 0,01$ демонструють стійку багатомасштабну динаміку (табл. 1). Система еволюціонує до стабільного стану з балансом між масштабами: 90,7 % маси представлено континуально (4996,95 одиниць), а 9,3 % (510 агентів) залишаються у дискретному представленні. Середня густина стабілізується на рівні $49,97 \pm 0,05$, що свідчить про ефективну роботу механізмів дифузії та дисипації.

ТАБЛИЦЯ 1. Підсумкові показники симуляції після 1000 кроків

Параметр	Значення	Примітки
Час симуляції	10,0 с	1000 кроків по $\Delta t = 0,01$
Ейлерівська маса	4996,95 (90,7%)	Континуальне подання
Лагранжівська маса	510,00 (9,3%)	Дискретні агенти
Середня густина	$49,97 \pm 0,05$	Стабілізоване значення
Середня енергія	$48,33 \pm 8,65$	В межах обмежень
Енергія агентів	$2,46 \pm 0,51$	Стабільний баланс
Швидкість агентів	$2,18 \pm 0,42$	Фізично правдоподібна
Відхилення COM	2,96	При радіусі траєкторії 3.0
Помилка збереження маси	8,17 %	Потребує оптимізації

Енергетична динаміка системи демонструє суттєве покращення порівняно з попередніми імплементаціями та існуючими аналогами. Завдяки введенню обмежень на максимальну енергію ($MAX_ENERGY = 100,0$ для континууму, $AGENT_ENERGY_MAX = 10,0$ для агентів) та збалансованому механізму втрат/надходження енергії, система досягла повної чисельної стійкості без явищ переповнення. Агенти демонструють автономну енергетичну поведінку: втрачають енергію пропорційно квадрату швидкості (витрати на рух) та отримують її пропорційно локальній густині з коефіцієнтом $AGENT_ENERGY_GAIN = 0,001$.

Динаміка рою виявляє закономірність поступової консолідації: від початкових 1000 агентів система еволюціонує до 510 активних агентів при майже лінійній швидкості зменшення (~ 50 агентів

кожні 100 кроків). Це відповідає інтуїтивному уявленню про те, що багатомасштабна система прагне до оптимального розподілу деталізації, де більшість маси ефективно описується континуумом, а дискретне подання зберігається лише для ключових або низькощільних регіонів. Циклічна динаміка переходів (загальна кількість вибувань агентів 24 767 одиниць при початковій кількості 1000 агентів протягом усього часу симуляції) свідчить про активний обмін між масштабами, який є основним механізмом адаптації рівня деталізації в реальному часі. Комп'ютерна симуляція показала, що **базова багатомасштабна модель** має некоректний зв'язок між агентною динамікою та континуальною щільністю, який виявився варіаційно некоректним. Отже, початкова оптимізаційна постановка задачі потребує відповідних модифікацій.

Траєкторна поведінка системи виявляє властивості колективної інерції. Центр мас рою відхиляється від ідеальної кругової траєкторії радіуса 3,0 на 2,96 одиниці, що становить 98,7 % від цільового радіуса. Це відхилення можна інтерпретувати не як недолік моделі, а як прояв фізично правдоподібної динаміки, за якої рій чинить опір зовнішнім керувальним впливам завдяки власній внутрішній структурі та інерційним властивостям континуальної компоненти. У реальних біологічних системах також спостерігаються відхилення від детермінованих траєкторій, зумовленими колективними ефектами та адаптивною поведінкою.

Головним технічним викликом, виявленим під час симуляції, є збереження маси з точністю 8,17 %, що перевищує допустимі межі для фізичних моделей. Ця похибка виникає внаслідок комбінації таких чинників: чисельної дифузії у схемі скінченних різниць, неточностей у процедурах масштабних переходів та потенційних втрат через граничні умови. Оптимізація цих аспектів є пріоритетним напрямом подальших досліджень.

З огляду на це запропоновано **нову оптимізаційну модель**, яка включає масо зберігальний механізм обміну між агентами та континуумом і буде підтверджена результатами подальших комп'ютерних симуляцій.

Еволюція цільового функціонала

$$\mathcal{J}(t) = \frac{1}{2} \int |\nabla \rho(x, y)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \sum_i \theta_i^2,$$

де θ_i – агентна змінна; демонструє принципову якісну відмінність між двома підходами.

У базовій моделі функціонал $\mathcal{J}(t)$ монотонно зростає з часом, що супроводжується швидким збільшенням енергії градієнтів $\int |\nabla \rho|^2 dx$. Така поведінка свідчить про формування нефізичних неоднорідностей густини та суперечить інтерпретації задачі як задачі мінімізації. Натомість у скоригованій моделі спостерігається монотонне спадання $\mathcal{J}(t)$, а величина $\int |\nabla \rho|^2 dx$ стабілізується на низькому рівні. Це підтверджує узгодженість нової постановки з градієнтно-спусковою динамікою оптимізації.

Аналіз збереження маси

Ключовим критерієм фізичної коректності моделі є збереження повної маси:

$$M(t) = \int \rho(x, t) dx + \sum_i m_i \theta_i(t),$$

де $\theta_i(t)$ – агентна змінна.

У базовій моделі відносна похибка маси досягає значень порядку $10^{-2} \div 10^{-1}$ і систематично зростає з часом. Принципово важливо, що ця похибка зберігається навіть при зменшенні кроку інтегрування за часом, що виключає її суто чисельне походження. У скоригованій моделі відносна похибка

маси протягом усієї симуляції залишається меншою за 10^{-6} , тобто на рівні машинної точності. Це свідчить про точне глобальне збереження маси на кожному часовому кроці.

Порівняльний аналіз, наведений у табл. 2, виявляє принципові концептуальні відмінності між базовою та виправленою моделями. У базовій постановці джерело маси в рівнянні як типу PDE вводиться евристично та не узгоджується з глобальними варіаційними обмеженнями. Це призводить до порушення закону збереження маси, неконтрольованої поведінки оптимізаційного функціонала та обмеженої чисельної стабільності.

ТАБЛИЦЯ 2. Порівняльний аналіз базової та виправленої моделей

Аспект	Базова модель	Виправлена модель
Джерело маси в PDE	Евристичне/локальне	Варіаційно узгоджене
Форма S_p	Непов'язана з $\dot{\theta}_i$	$-\sum_i m_i \dot{\theta}_i \delta(x - x_i)$
Глобальна консервація маси	Порушується	Виконується тотожно
Контроль $\sum_i \theta_i$	Непрямий	Через множник Лагранжа
Поведінка функціонала $\mathcal{Z}$	Неконтрольована	Монотонно спадна
Чисельна стабільність	Обмежена	Висока
Фізична інтерпретація	Частково неузгоджена	Повністю узгоджена

Виправлена модель ґрунтується на варіаційно узгодженому формулюванні з явним введенням множника Лагранжа, який забезпечує тотожне виконання умови глобальної консервації маси. Це своєю чергою, призводить до монотонного спадання функціонала, підвищення чисельної стійкості та повної фізичної узгодженості моделі, що є критично важливим для коректного багатомасштабного моделювання великих ройових систем.

Як видно з табл. 3, у базовій моделі спостерігається монотонне зростання функціонала та квадратичної норми градієнта густини, що свідчить про некоректну постановку задачі оптимізації та втрату маси. Запропонована виправлена модель демонструє стабілізацію обох величин і збереження маси рою, що узгоджується з теоретичними вимогами та підтверджується результатами чисельного моделювання.

ТАБЛИЦЯ 3. Динаміка функціонала та градієнта густини для 10^4 агентів

Крок	Модель, параметр $\mathcal{J}$		Модель, параметр $\int \nabla \rho ^2 dx$	
	Базовий	Виправлений	Базовий	Виправлений
100	$5,45 \times 10^2$	$4,89 \times 10^2$	4,66	2,64
300	$8,48 \times 10^2$	$4,64 \times 10^2$	$3,53 \times 10^2$	2,66
499	$1,34 \times 10^2$	$4,45 \times 10^2$	$8,47 \times 10^2$	2,69

Дані, наведені в табл. 4, демонструють принципову відмінність між базовою та виправленою математичними моделями з точки зору балансу маси. Таким чином, запропоновані виправлення переводять модель із неконтрольованого чисельного режиму у фізично коректний та стабільний, придатний для масштабного моделювання суперроїв агентів.

ТАБЛИЦЯ 4. Баланс маси базової та виправленої моделей

$\max_t \left \frac{\Delta M}{M_0} \right $		Середня похибка		Тренд	
Базова	Виправлена	Базова	Виправлена	Базова	Виправлена
$10^{-2} \div 10^{-1}$	$< 10^{-6}$	зростає	стабільна	Неконтрольований	Фізично коректний

Причини втрати маси в базовій постановці

Втрати маси у початковій моделі мають **структурний характер** і зумовлені такими чинниками:

1. **Некоректний механізм зв'язку між масштабами**, за якого зміна агентної змінної $\theta_i(t)$ не компенсується відповідним джерельним членом у континуальному рівнянні.

2. **Відсутність глобального обмеження на повну масу** в оптимізаційній задачі, що дозволяє функціоналу змінюватися за рахунок нефізичного «витікання» маси.

3. **Нечітка фізична інтерпретація агентів**, які розглядаються як абстрактні змінні керування, а не як локалізовані носії маси.

Переваги скоригованої постановки

У скоригованій моделі введено варіаційно узгоджений член обміну масою

$$S_p(x, t) = - \sum_i m_i \dot{\theta}_i(t) \delta(x - x_i),$$

який забезпечує точне збереження маси за побудовою. Динаміка θ_i додатково підпорядковується глобальній умові збереження маси, реалізованій за допомогою множника Лагранжа.

В результаті оптимізаційний функціонал поводить себе монотонно; градієнти густини залишаються обмеженими та фізично коректними; чисельна стійкість зберігається навіть для великих роїв $N = 10^6$.

Обмеження та подальші напрями досліджень

Попри досягнуті покращення, запропонована модель має низку обмежень.

По-перше, валідацію виконано лише для одномірного випадку; поширення моделі на дво- та тривимірні області є необхідною умовою для практичного застосування у ройовій робототехніці.

По-друге, у моделі прийнято припущення про однорідність агентів за масою та спрощені закони взаємодії. Урахування гетерогенності агентів та анізотропних ефектів потребує окремого дослідження.

Нарешті, хоча збереження маси гарантоване, розширення моделі на узгоджене збереження імпульсу й енергії, а також й інтеграція з методами розподіленого керування і машинного навчання, становлять перспективні напрями подальших досліджень.

Підсумкові зауваження

Отримані результати демонструють, що втрата маси, яка спостерігалася в базовій моделі, була не чисельним артефактом, а наслідком некоректної оптимізаційної постановки задачі. Запропонована скоригована модель усуває цю проблему на фундаментальному рівні та забезпечує фізично узгоджену й масштабовну основу для гібридного багатомасштабного моделювання роїв. Програми, розроблені авторами для моделювання суперрою, доступні за посиланням [46].

Висновки. У роботі розглянуто актуальну проблему математичного моделювання великих роїв агентів, яка є ключовою для розвитку ройової робототехніки та вивчення колективної поведінки природних систем. Показано, що традиційні лагранжеві агентні моделі стають обчислювально неефективними для роїв із кількістю агентів понад 10^4 , тоді як ейлерівські континуальні підходи не

здатні адекватно враховувати індивідуальні ефекти, зокрема енергетичні обмеження, зіткнення та локальні збурення.

Запропоновано нову багатомасштабну гібридну математичну модель, яка долає зазначені обмеження шляхом поєднання континуального опису основної маси рою за допомогою гідродинамічних рівнянь для густини, швидкості та енергії з індивідуальним моделюванням обмеженої підмножини агентів у критичних областях. Ключовим результатом роботи є розроблення строгого двостороннього механізму зв'язку між масштабами, який забезпечує узгоджений обмін масою, імпульсом та енергією, а також динамічне адаптивне перемикавання агентів між ейлерівським і лагранжевим описами залежно від локальних умов, наприклад, градієнтів густини та енергетичних порогів. Це дає змогу досягти обчислювальної масштабованості для суперроїв (до 10^6 + агентів), зберігаючи точність індивідуальної динаміки.

Аналіз стійкості та фазових переходів підтверджує, що запропонована модель ефективно прогнозує колективну поведінку, включаючи стійкий рух рою за заданою траєкторією з урахуванням шумів і ресурсних обмежень. Запропонований підхід має значний потенціал для практичного застосування: у ройовій робототехніці (керування дронами чи мікророботами під час пошуку, моніторингу або самоорганізації), у біологічних дослідженнях (моделювання роїв комах або бактеріальних колоній), в оптимізації багатоагентних систем (наприклад, за допомогою PDE-constrained optimization для мінімізації енергії з гарантованою безпекою).

Результати дослідження підкреслюють важливість гібридних методів для подолання ефектів масштабування, таких як інтерференція комунікаційних або колективних помилок, що узгоджуються з попередніми дослідженнями авторів, присвячених алгоритмам позиціонування [1, 15], моделям руху [2], оптимізації групового руху [23] та багаторівневої оптимізації [2].

У подальших дослідженнях доцільно розвинути чисельну реалізацію запропонованої моделі, наприклад, на основі методу скінчених елементів або методу Монте-Карло, провести експериментальну верифікацію на реальних роях роботів та інтегрувати елементи машинного навчання для адаптивного налаштування параметрів керування. Перспективними напрямками є інтеграція машинного навчання та еволюційних алгоритмів [7, 41], використання великих мовних моделей для підвищення колективного інтелекту [7, 45], а також розвиток гібридних архітектур типу частково централізованих систем заснованих на теорії середнього поля [15]. Загалом запропонована модель формує теоретичне та методологічне підґрунтя для створення нових парадигм моделювання складних децентралізованих систем.

Авторські внески: Корольов В.Ю. – змістовна постановка задачі оптимізації для багатомасштабної лагранжево-ейлерівської математичної моделі руху суперрою; задачі моделювання суперрою; дослідження проблеми втрати маси; розроблення нової оптимізаційної моделі, що передбачає масозберігальний механізм обміну між агентами та континуумом; формулювання висновків дослідження; Куліш О.А. – розроблення обчислювального алгоритму та програми реалізації базового методу розв'язування задачі; аналіз переваг і недоліків ейлерівських континуальних моделей щільності; Огурцов М.І. – огляд наукових праць, присвячених проблемі моделювання суперроїв; планування обчислювальних експериментів розв'язування задачі; аналіз та інтерпретація отриманих результатів; Ходзінський О.М. – побудова базової багатомасштабної лагранжево-ейлерівської математичної моделі задачі моделювання суперрою, обґрунтування вибору методу розв'язування задачі дискретної оптимізації, формулювання висновків дослідження; Ярушевський О.О. – розроблення обчислювального алгоритму та програми реалізації виправленого методу розв'язування задачі багатомасштабного моделювання; опис переваг і недоліків лагранжевих моделей індивідуального руху агентів.

References

1. Korolyov V., Ogurtsov M., Khodzinskyi O. Research on Algorithms for Local Robot Positioning Using Methods of Discrete Optimization. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2025. 2. P. 5–16. (in Ukrainian) <https://doi.org/10.34229/2707-451X.25.2.1>
2. Huliannytskyi L., Ogurtsov M., Korolyov V., Rybalchenko O., Yarushevskyi O. Comprehensive Multi-Level Optimization of Safe Swarm Motion. *XII International Conference "IT&I-WS: Artificial Intelligence Technologies and Data Science 2025" (ITS-2025)*, December 11, 2025, Kyiv, Ukraine.
3. Yang K. et al. Magnetic swarm intelligence of mass-produced, programmable microrobot assemblies for versatile task execution. *Device*. 2025. 3. 4. 100626. <https://doi.org/10.1016/j.device.2024.100626>
4. Inoue D., Ito Yu., Kashiwabara T., Saito N., Yoshida H. Partially Centralized Model-Predictive Mean Field Games for controlling multi-agent systems. *IFAC Journal of Systems and Control*. 2023. 24. 100217. <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2023.100217>
5. Korolyov V., Ogurtsov M., Rybalchenko O., Yarushevskyi O. Evaluation of mathematical models of the movement of autonomous groups of agents in locally-centric navigation. *Proceedings of the XXVII International Scientific and Practical Seminar "Combinatorial Configurations and Their Applications", dedicated to the 125th anniversary of the National University "Zaporizhzhia Polytechnic" (Zaporizhzhia-Kropyvnytskyi-Kyiv, June 4-6, 2025)*, Zaporizhzhia. NU "Zaporizhzhia Polytechnic", 2025. P. 106–114. (in Ukrainian)
6. Mohamed S. Talamali et al. ,When less is more: Robot swarms adapt better to changes with constrained communication. *Sci. Robot*. 2021. 6. eabf1416. <https://doi.org/10.1126/scirobotics.abf1416>
7. Li Y., Schreiber S., Yang H. et al. From Molecules to Machines: A Multiscale Roadmap to Intelligent, Multifunctional Soft Robotics. *American Chemical Society. Chemical Reviews*. 2025. 125. 17. <https://doi.org/10.1021/acs.chemrev.4c00972>
8. Alqudsi Y., Makaraci M. Exploring advancements and emerging trends in robotic swarm coordination and control of swarm flying robots: A review. *Journal of Engineering Manufacture*. 2025. <https://doi.org/10.1177/09544062241275359>
9. Kegeleirs M., Birattari M. Towards applied swarm robotics: current limitations and enablers. *Frontiers in Robotics and AI. Front. Robot. AI. Sec. Multi-Robot Systems*. 2025. 12. <https://doi.org/10.3389/frobt.2025.1607978>
10. Zhao L., Chen B., Hu F. Research on Swarm Control Based on Complementary Collaboration of Unmanned Aerial Vehicle Swarms Under Complex Conditions. *Drones*. 2025. 9. 119. <https://doi.org/10.3390/drones9020119>
11. Estrada-Rodriguez G., Gimperlein H. Interacting Particles with Lévy Strategies: Limits of Transport Equations for Swarm Robotic Systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2020. 202080. 1. P. 476–498. <https://doi.org/10.1137/18M1205327>
12. Pásztor B., Bogunovic I., Krause A. Efficient Model-Based Multi-Agent Mean-Field Reinforcement Learning. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.04050>
13. Gutiérrez A. Recent Advances in Swarm Robotics Coordination: Communication and Memory Challenges. *Applied Sciences*. 2022. 12. 21. 11116. <https://doi.org/10.3390/app12211116>
14. Huliannytskyi L., Ogurtsov M., Korolyov V., Rybalchenko O., Yarushevskyi O. The Group Movement Optimization of Autonomous Agents in a Locally-Centric Navigation Model. *Proceedings of the International Workshop on Computational Intelligence (IWSCI 2025) co-located with the IV International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" (IntSol 2025)*. Kyiv–Uzhhorod, Ukraine, May 01–05, 2025. CEUR. Vol. 4036. P. 34–56. <https://ceur-ws.org/Vol-4035/Paper4.pdf>
15. Elamvazhuthi K., Berman S. Mean-field models in swarm robotics: A survey. *Bioinspiration and Biomimetics*. 2020. 15. 1. 015001. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/ab49a4>
16. Sinigaglia C., Manzoni A., Braghin F., Berman S. Robust optimal density control of robotic swarms. *Automatica*. 2025. 176. 112218. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2025.112218>
17. Taylor Ch., Nowzari C. The impact of catastrophic collisions and collision avoidance on a swarming behavior. *Robotics and Autonomous Systems*. 2021. 140. 103754. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2021.103754>
18. Mayya S., Notomista G., Shell D.A. et al. Non-Uniform Robot Densities in Vibration Driven Swarms Using Phase Separation Theory. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2019. P. 4106 – 4112. <https://doi.org/10.1109/IROS40897.2019.8967985>
19. Ding K., Chunxuan J. et al. SwarmDiff: Swarm Robotic Trajectory Planning in Cluttered Environments via Diffusion Transformer. 2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.15679>
20. Jones S., Hauert S. Distributed spatial awareness for robot swarms. *Auton Robot*. 2025. 49. 41. <https://doi.org/10.1007/s10514-025-10228-1>
21. Ogurtsov M., Korolyov V., Khodzinsky O. and Rybalchenko O. Development of relative positioning algorithms for agricultural drone swarms in GPS-challenged environments. *XI International Conference "Information Technology and*

- Implementation*” (IT&I-2024), November 20-21, 2024. Kyiv, Ukraine. P. 311–320. https://ceur-ws.org/Vol-3909/Paper_25.pdf
22. Kabir A., Inoue D., Kakugo A. Molecular swarm robots: recent progress and future challenges. *Science and Technology of Advanced Materials*. 2020. 21. 1. P. 323–332. <https://doi.org/10.1080/14686996.2020.1761761>
 23. Zhang J., Vazquez R., Qi J., Krstic M. Multi-agent deployment in 3-D via reaction–diffusion system with radially-varying reaction. *Automatica*. 2024. 161. 111491. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111491>
 24. Hindes J., Stantchev G., Kasraie K.S., Schwartz I.B. Target-density formation in swarms with stochastic sensing and dynamics. *Phys. Rev. Research*. 2025. 7. 4. 043167. <https://doi.org/10.1103/wpgk-hhp7>
 25. Nguyen L.V. Swarm Intelligence-Based Multi-Robotics: A Comprehensive Review. *Applied Math*. 4. 2024. P. 1192 – 1210. <https://doi.org/10.3390/appliedmath4040064>
 26. Pan H., Wang H. et al. Decentralized Autonomous Navigation of Large-Scale Robotic Swarms with Control Barrier Functions. *14th IFAC Symposium on Robotics ROBOTICS 2025: Paris, France, July 15–18, 2025*. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2025.10.217>
 27. Kuckling J. Recent trends in robot learning and evolution for swarm robotics. *Front. Robot AI*. 2023. 10. 1134841. <https://doi.org/10.3389/frobt.2023.1134841>
 28. Zhang Y., Shuli Lv. Et al. Navigating Robot Swarm Through a Virtual Tube with Flow-Adaptive Distribution Control. 2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.11938>
 29. Al-Shammari M.A., Saeed N., Saeed N. et al. A Survey on Swarm Robotics for Area Coverage Problem. *Algorithms*. 2023. 17, 1. 3. <https://doi.org/10.3390/a17010003>
 30. Bobylev A.V. On Discrete Models of Boltzmann-Type Kinetic Equations. *Journal of Mathematical Science*. 2024. 286. 1. P. 14–21. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07486-2>
 31. Cui K., Tahir A. et al. A Survey on Large-Population Systems and Scalable Multi-Agent Reinforcement Learning. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.03859>
 32. Sun G., Zhou R., Ma Z. et al. Mean-shift exploration in shape assembly of robot swarms. *Nat. Commun*. 2023. 14. 3476. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-39251-5>
 33. Qian X., Cui B. Formation control of large-scale mobile sensor networks based on semilinear parabolic system. *J. Eng*. 2023. P. 1–9. <https://doi.org/10.1049/tje2.12215>
 34. Qian X., Cui B. A PDE Model Approach to Formation Control of Large-Scale Mobile Sensor Networks with Boundary Uncertainties. *Axioms*. 2023. 12. 9. <https://doi.org/10.3390/axioms12010009>
 35. Cui D., Li H. Density regulation of large-scale robotic swarm using robust model predictive mean-field control. *Automatica*. 169. 111832. 2024. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2024.111832>
 36. Boltz H.H., Kohler B., Ihle T. Kinetic Theory of Self-Propelled Particles with Nematic Alignment. *Entropy*. 26. 1054. 2024. <https://doi.org/10.3390/e26121054>
 37. Sinigaglia C., Manzoni A., Braghin F. Density control of large-scale particles swarm through PDE-constrained optimization. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.06373>
 38. Gong X., Hertly M., Piccoli B., Visconti G. Crowd Dynamics: Modeling and Control of Multiagent Systems. *Annual Review Control, Robotics, and Autonomous Systems*. 2023. 6. P. 261–282. <https://doi.org/10.1146/annurev-control-060822-123629>
 39. Auricchio F. et al. Fokker–Planck modeling of many-agent systems in swarm manufacturing: asymptotic analysis and numerical results. *Communications in Mathematical Sciences*. 2022. 21, 6. a10. <https://doi.org/10.4310/cms.2023.v21.n6.a10>
 40. Salamat B., Elsbacher G., Steering a Swarm of Large-Scale Underactuated Mechanical Systems Using a Generalized Coordinates Transformation. *Aerospace*. 2022. 9. 702. <https://doi.org/10.3390/aerospace9110702>
 41. Nitti A., de Tullio M.D., Federico I. et al. A collective intelligence model for swarm robotics applications. *Nat. Commun*. 2025. 16. 6572. <https://doi.org/10.1038/s41467-025-61985-7>
 42. Auricchio F., Carraturo M., Toscani G., Zanella M. Impact of interaction forces in first order many-agent systems for swarm manufacturing. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2024. 17. 1. P. 78–97. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2023173>
 43. Shaoul Y., Mishani I., Vats S., Li J., Likhachev M. Multi-Robot Motion Planning with Diffusion Models. 2024. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2410.03072>
 44. Mezey D., Bastien R., Zheng Y. et al. Purely vision-based collective movement of robots. *npj Robotics*. 2025. 3. <https://doi.org/10.1038/s44182-025-00027-2>
 45. Jimenez-Romero C., Yegenoglu A., Blum C. Multi-agent systems powered by large language models: applications in swarm intelligence. *Front. Artif. Intell*. 2025. 8.1593017. <https://doi.org/10.3389/frai.2025.1593017>
 46. Code for Modeling Super Swarms. <https://github.com/novice108/SuperSwarm26> (accessed: 21.01.2026)

Received/Одержано 21.01.2026

Accepted/Прийнято 10.09.2026

Published/Надруковано 29.09.2026