

Література

1. Belloch, G. E., Fineman, J. T., Gu, Y., & Sun, Y. (2020). Optimal parallel algorithms in the binary-forking model. In Proceedings of the 32nd ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures, 89-102.
2. Berlin, J., Tanase, G., Bianco, M., Rauchwerger, L., & Amato, N. M. (2007). Sample sort using the standard template adaptive parallel library. Sample Sort using the Standard Template Adaptive Parallel Library.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ МІСІЇ ГРУПИ БПЛА, ОСНАЩЕНИХ СПРЯМОВАНИМИ АНТЕНАМИ

Вячеслав Корольов, Максим Огурцов,
Олександр Ходзінський, Олександр Ярушевський
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

MATHEMATICAL MODEL AND ALGORITHMIC SUPPORT FOR MISSION OPTIMIZATION OF A GROOUP OF UAVS EQUIPPED WITH DIRECTIONAL ANTENNAS

Vyacheslav Korolyov, Maksim Ogurtsov,
Oleksandr Khodzinskyi, Oleksandr Yarushevskyi
*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of
Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

Abstract. This article presents a new mathematical model and a distributed control algorithm for a swarm of unmanned aerial vehicles (UAVs) equipped with rigidly mounted directional antennas under active electronic warfare conditions. The problem is formulated on a smooth $SE(3)$ manifold using multi-agent coordination methods on Riemannian manifolds. The proposed Fuzzy-SE3 method integrates four key mechanisms: dynamic 3D topological trifurcation based on Steiner trees, kinematic yaw-coupling of the UAVs body orientation, an adaptive Takagi-Sugeno fuzzy controller for antenna pointing accuracy, and geometric modeling of the electromagnetic interference field using a Riemannian metric.

1. Вступ.

Забезпечення стійкого радіозв'язку рою БПЛА зі спрямованими антенами в умовах дії засобів радіоелектронної боротьби (РЕБ) є важливою проблемою на сьогодні в цивільних застосуваннях та застосуваннях подвійного призначення, що робить його одним із ключових викликів сучасної мережецентричної безпілотної авіації. На відміну від ізотропних антен, спрямовані системи забезпечують значно вищий коефіцієнт

підсилення та просторову селективність, однак вони висувають принципово нову вимогу до системи керування: необхідність одночасного контролю як просторового положення, так і тривимірної орієнтації корпусу кожного агента [1]. Методи керування роєм БПЛА [2] традиційно поділяють на три категорії [3, 4]. По-перше, біологічно натхненні підходи, такі, наприклад, як Boids, оптимізація потоком частинок (Particle Swarm Optimization, PSO), консенсусні протоколи, працюють виключно в евклідовому просторі й повністю ігнорують кутову орієнтацію корпусу. По-друге, геометричні методи керування на гладких многовидах $SO(3)$ та $SE(3)$, що успішно вирішують проблему точного відстеження траєкторії для окремого агента, але не поширюються на кооперативну взаємодію в рої. По-третє, сучасні методи протидії засобом РЕБ, засновані на глибокому навчанні з підкріпленням або траєкторному плануванні, що оптимізують поведінку окремих агентів, не враховуючи колективний вимір задачі та жорсткий кінематичний зв'язок «положення—орієнтація». Існуючі методи не задовольняють одночасно вимогам: (а) багатоагентності з геометричними методами керування на гладких многовидах $SE(3)$; (б) зв'язування положення та орієнтації; (в) адаптації до завад РЕБ; (г) розподіленої архітектури прийняття рішень роєм.

Метою даної роботи є розроблення та всебічний аналіз запропонованого методу Fuzzy-SE3, який заповнює окреслену прогалину. Метод інтегрує чотири підходи: динамічну 3D топологічну трифуркацію на основі дерев Штейнера [5], кінематичне зв'язування орієнтації антени за кутом рискання (Yaw-Coupling), адаптивний нечіткий контролер Такагі-Сугено нульового порядку для забезпечення гладкості функціоналу та конформне моделювання поля РЕБ за допомогою ріманової метрики. Окрім синтезу методу, в роботі виконаний аналіз стійкості, оцінка багатокритеріальної Парето-оптимізації параметрів та порівняльне імітаційне моделювання з методами-оракулами для визначення практичної застосовності запропонованого методу.

2. Огляд літератури

Розглянемо основні методи, застосовні для керування роєм БПЛА. Почнемо з евристичних методів (Вічек [6], Boids [7], оптимізація роєм частинок (PSO) [8]). Піонерська модель Вічека [6] продемонструвала виникнення колективного руху в системі самохідних частинок. Модель Boids Рейнольдса [7] реалізує емерджентну поведінку через три локальні правила: відштовхування, вирівнювання та притягання. Метод PSO [8] є потужним стохастичним оптимізатором, що використовує глобальний обмін інформацією і в нашому аналізі слугує теоретичною верхньою межею (оракулом). Однак PSO вимагає централізованого доступу до карти завад, що далеко не завжди можливо в реальних сценаріях РЕБ. Тобто евристичні методи працюють у тривимірному просторі, але ігнорують орієнтацію. Метод потенціальних полів базується на русі за антиградієнтом суперпозиції потенціалів притягування та відштовхування [1]. Він ефективний для запобігання зіткненням, але страждає від

застрягання в локальних мінімумах і не моделює кутову орієнтацію. Методи потенціальних полів та Olfati-Saber [9] не враховують дію засобів РЕБ. Геометричне керування Лі [10] на $SO(3)$, що усуває проблему сингулярностей Ейлера, застосовне лише для одного агента. Дуальні кватерніони [11, 12] вимагають централізації керування маршрутами кожного елемента рою. Жоден метод не реалізує одночасно систему на $SE(3)$, зв'язок антен, модель РЕБ та розподіленість керування агентами рою [11-14].

3. Постановка задачі

Розглядається однорідний рій із N автономних агентів БПЛА. Оскільки кожен агент оснащений спрямованою антеною (наприклад, патч-антеною), жорстко закріпленою на корпусі, просторове положення та поточна орієнтація є нерозривно пов'язаними фізичними величинами. Стан i -го агента компактно описується одиничним дуальним кватерніоном $\hat{q}_i \in SE(3)$ (1) що є елементом групи спеціальних евклідових перетворень тривимірного простору.

$$\hat{q}_i = q_i + \varepsilon \cdot \frac{1}{2} p_i \otimes q_i, \quad (1)$$

де $q_i \in S^3 \subset H$ – одиничний кватерніон орієнтації, $p_i \in R^3$ – вектор положення в інерціальній системі координат, ε – дуальна одиниця, а $\otimes$ позначає кватерніонне множення.

Кінематика руху на многовиді $SE(3)$ описується диференціальним рівнянням (2):

$$\dot{\hat{q}}_i = \frac{1}{2} \hat{q}_i \otimes \hat{\omega}_i, \quad (2)$$

де $\hat{\omega}_i = \omega_i + \varepsilon v_i$ – дуальний твіст (кінематичний гвинт). Тут $\omega_i \in R^3$ – вектор кутової швидкості, а $v_i \in R^3$ – вектор лінійної швидкості твердого тіла у зв'язаній системі координат агента i .

Повна системна динаміка враховує нелінійні ефекти Коріоліса та інерційні збурення, що виникають під час високодинамічних маневрів:

$$M_i \dot{\xi}_i + C(\xi_i) \xi_i = \tau_i + d_i, \quad (3)$$

де $\xi_i = (\omega_i, v_i) \in SE(3)$ – координати твісту (елемент алгебри Лі), $M_i \in R^{6 \times 6}$ – розширена матриця інерції, $C(\xi_i) \in R^{6 \times 6}$ – матриця коріолісових та відцентрових сил, $\tau_i \in R^6$ – вектор керувальних сил та моментів, $d_i \in R^6$ – непередбачуване зовнішнє збурення (наприклад, пориви вітру).

Топологія взаємодії агентів описується динамічним неорієнтованим графом $G(t) = (V, E(t))$, Ребро $(i, j) \in E(t)$ існує тоді й лише тоді, коли поточна міжагентна відстань d_{ij} та просторові орієнтації корпусів обох БПЛА дозволяють їхнім головним пелюсткам діаграм спрямованості встановити радіоканал із достатньою якістю (бюджетом) лінії зв'язку.

4. Оптимізаційний функціонал

Для забезпечення емерджентної поведінки рою, мінімізації взаємних радіозавад та досягнення точного наведення антени вводиться повний варіаційний функціонал J : топологія (Штейнер, 120°) – J_{topo} , орієнтація (нечіткий $\gamma_{ij}(d)$) – J_{orient} , РЕБ (ріманова метрика) – J_{adv} , безпека руху – J_{safe} .

На відміну від класичних підходів, що підтримують жорстку геометричну формацію, запропонований рій формує гнучке динамічне дерево Штейнера безпосередньо в 3D просторі.

$$J(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N) = \lambda_1 J_{topo} + \lambda_2 J_{orient} + \lambda_3 J_{adv} + \lambda_4 J_{safe} \quad (4)$$

де коефіцієнти $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, 4$ – скалярні пріоритети компонент місії. Кожен агент мінімізує свій локальний внесок у J у реальному часі. Функціонал J_{topo} спроектовано так, щоб ретрансляційні вузли просторово розподіляли свої канали, ефективно балансує сили натягу між ними та штрафуючи систему за утворення гострих кутів:

$$J_{topo} = \sum \sigma_{ij} \|p_i - p_j\| + \rho \sum (\theta_{jik} - \theta_0)^2, \quad (5)$$

де $\theta_0 = 2\pi/3$ рад 120° задає ідеальний кут Штейнера, $\rho > 0$ – коефіцієнт кутового штрафу, σ_{ij} – інформаційний натяг каналу, пропорційний необхідній швидкості передачі даних. Квадратичний штраф $(\theta_{jik} - \theta_0)^2$ дорівнює нулю лише при $\theta_{jik} = 120^\circ$ і симетрично зростає при відхиленні.

Оскільки модель антенної системи не передбачає електронне сканування сусідів, БПЛА має фізично розвертати корпус так, щоб вектор осі антени збігався з напрямком на сусіда:

$$J_{orient} = \sum \gamma_{ij}(d_{ij}) \cdot (1 - r_i \cdot v_{ij})^2, \quad (6)$$

де $\gamma_{ij}(d)$ – нечіткий контролер, неперервна адаптивна функція, синтезована нечітким контролером Такагі-Сугено нульового порядку, $d = d_{ij}$ евклідова відстань, $r_i(q_i)$ – вектор осі антени, що збігається з напрямком на сусіда $v_{ij} = (p_j - p_i) / \|p_j - p_i\|$.

Вхідною змінною є евклідова відстань $d = d_{ij}$. База правил містить два правила:

IF distance is NEAR **THEN** $\gamma_{ij} = \gamma_{near}$ (послаблене наведення);

IF distance is FAR **THEN** $\gamma_{ij} = \gamma_{far}$ (жорстке наведення).

Дефазифікація за методом середнього зваженого дає C^∞ -гладку функцію.

$$\gamma_{ij}(d_{ij}) = \mu_{NEAR}(d_{ij}) \cdot \gamma_{near} + \mu_{FAR}(d_{ij}) \cdot \gamma_{far}$$

Зовнішні завади РЕБ моделюються як просторове викривлення операційного середовища через конформну ріманову метрику.

Нечіткий контролер: $\gamma_{ij}(d) = \mu_{NEAR} \gamma_{near} + \mu_{FAR} \gamma_{far}$ забезпечує C^∞ -гладкість. Визначено дві лінгвістичні терми з сигмоїдними функціями належності:

$$\mu_{NEAR}(d) = \frac{1}{1 + \exp(k(d - d_0))}, \quad \mu_{FAR}(d) = 1 - \mu_{NEAR}(d), \quad (7)$$

де d_0 – межа дальності зв'язку.

5. Закон керування

Оскільки положення та орієнтація БПЛА жорстко пов'язані, закон керування обчислюється безпосередньо на многовиді ($SE(3)$). Остаточний закон керування (повністю компенсований гвинтовий пропорційно-диференціальний контролер, Screw PD+) має вигляд:

$$\tau_i = -K_p \dot{e}_i - K_d \ddot{\xi}_i + C(\ddot{\xi}_i) \ddot{\xi}_i, \quad (8)$$

де $K_p, K_d \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – додатно визначені матриці підсилення. Цільовий стан $\hat{q}_d$ формується градієнтним спуском: $u_i = -\hat{V}_{\hat{q}_i} J = -(\lambda_1 g_i^{\text{topo}} \lambda_2 g_i^{\text{orient}} \lambda_3 g_i^{\text{adv}} \lambda_4 g_i^{\text{safe}})$.

Ліво-тривіалізований ріманів градієнт на $SE(3)$ $\hat{V}_{\hat{q}_i} J = \omega^\nabla + \varepsilon v^\nabla$ породжує бажані швидкості для зовнішнього контуру планування. Лінійна частина $v^\nabla = R_i^\top \nabla_{p_i} J$, де повний просторовий градієнт має внески від усіх компонент:

$$\nabla_{p_i} J = \lambda_1 \nabla_{p_i} J_{\text{topo}} + \lambda_2 \nabla_{p_i} J_{\text{orient}} + \lambda_3 \nabla_{p_i} J_{\text{adv}} + \lambda_4 \nabla_{p_i} J_{\text{safe}}.$$

Зокрема, градієнт топологічного штрафу має вигляд:

$$\nabla_{p_i} J_{\text{topo}} = \sum_{j \in N(i)} \sigma_{ij} \frac{p_i - p_j}{d_{ij}} \rho \sum_{j < k} \frac{2(\theta_{jk} - \theta_0)}{s_{jk}} \left[\frac{u_k - c_{jk} u_j}{d_{ij}} \frac{u_j - c_{jk} u_k}{d_{ik}} \right],$$

де $c_{jk} = u_j \cdot u_k$, $s_{jk} = \sin \theta_{jk}$.

Градієнт орієнтаційної складової враховує нечіткий коефіцієнт:

$$\nabla_{p_i} J_{\text{orient}} = \sum_{j \in N(i)} \left[\gamma'(d_{ij})(1 - \mu_{ij})^2 (-v_{ij}) \frac{2\gamma_{ij}(1 - \mu_{ij})}{d_{ij}} (r_i - \mu_{ij} v_{ij}) \right].$$

де $\mu_{ij} = r_i \cdot v_{ij}$, а $\gamma'(d) = (\gamma_{\text{far}} - \gamma_{\text{near}}) \cdot k \cdot \mu_{\text{FAR}}(d) \cdot (1 - \mu_{\text{FAR}}(d))$.

Антагоністичний та захисний градієнти є стандартними векторними похідними:

$$\begin{aligned} \nabla_{p_i} J_{\text{adv}} &= \eta \nabla_{p_i} J_{\text{rjam}}(p_i), \\ \nabla_{p_i} J_{\text{safe}} &= \sum_{j \neq i, d_{ij} < d_{\text{safe}}} \left[\frac{-1}{(d_{ij} - d_{\text{min}})^2} \right] \cdot \frac{p_i - p_j}{d_{ij}}. \end{aligned}$$

Кутова складова ω^∇ залежить лише від J_{orient} :

$$\omega^\nabla = \sum_{j \in N(i)} -2\gamma_{ij}(1 - \mu_{ij})(r_{\text{body}} \times t_{\text{body},ij}).$$

де $t_{\text{body},ij} = R_i^\top v_{ij}$ – напрямок на сусіда у зв'язаній системі, а r_{body} – фіксований вектор антени у тій самій системі. Ці вирази дозволяють реалізувати алгоритм як повністю аналітичний локальний контур керування зі складністю $O(|N(i)|^2)$.

6. Аналіз стійкості

Для обґрунтування працездатності системи сформульовано низку тверджень на компактній множині допустимих станів, де виконуються умови уникнення зіткнень, обмеженості робочого простору та невідродженості матриць інерції. **Твердження 1:** J є C^∞ -гладким. **Твердження 2:** Screw PD+ – локально експоненційно стійкий. Доведення ґрунтується на функції Ляпунова. **Твердження 3:** Похибка рівномірно обмежена. **Твердження 4:** Градієнтний потік спадає. Оскільки J обмежений знизу, за принципом Ла Салля траєкторії збігаються до множини критичних точок. **Твердження 5:** $\pi_1(\text{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$ унеможливорює глобальну асимптотичну стійкість; досяжна майже глобальна асимптотична стійкість [10], що узгоджується з локальною експоненційною стійкістю

внутрішнього контуру. Логіка перемикачів топології включає умови строгого спадання функціоналу та мінімального часу перебування, що викликає поведінку Зенона та гарантує скінченну кількість змін графа.

7. Результати

Моделювання виконано в середовищі Python із JIT-компіляцією Numba, крок інтегрування 0,01 с. Параметри: $N \in [6, 20]$, $\Delta t = 0,01$ с, потужність передавача $P_{tx} = 20$ дБм, рівень шуму $N_0 = -100$ дБм. Поле РЕБ моделювалось просторовим розподілом з експоненційним затуханням від центру джерела.

У табл. 1 наведено результати покомпонентного аналізу для $N=6$.

Таблиця 1

Внесок компонентів ($N=6$, $T=20$ с)

Конфігурація	SINR, дБ	Стд. відх.	Енерг., Дж	Стд. відх.
Fuzzy-SE3	-72,7	8,61	137,3	47,9
Без нечіткості	-81,7	2,35	6,2	1,8
Чисто позиційне	-87,8	1,59	0,0	0,0

Перехід від чисто позиційного керування до конфігурації без нечіткого контролера (але з деревами Штейнера) підвищує середній SINR на 6,1 дБ. Додавання нечіткого контролера (повна модель) дає додатковий приріст у 9,0 дБ, що в сумі становить +15,1 дБ порівняно з базовим рівнем.

У табл. 2 наведено порівняння Fuzzy-SE3 з алгоритмами PSO [8], Boids [7], Potential Field [1] та Olfati-Saber [9].

Таблиця 2

Порівняння методів ($N=6$, $T=20$ с)

Метод	Серед. SINR, дБ	Макс. SINR, дБ	adjо%, %	Оракул
PSO	+18,2	+21,6	0,0	Так
Boids	+13,4	+26,7	0,0	Так
Fuzzy-SE3	+15,1	+25,7	0,5	Ні
Olfati-Saber	-44,0	+9,4	0,0	Ні

Fuzzy-SE3: +15,1 дБ, на +29,5 дБ краще Olfati-Saber, на ~3 дБ поступається PSO (з оракулом). Зв'язність 99,5%. Масштабованість $N=4 \rightarrow 12$: Fuzzy-SE3 -0,2 дБ, PSO -55,2 дБ, Boids -44,5 дБ, Olfati-Saber -72,3 дБ. Парето: $w_1=0,44$, $w_2=0,56$ дає SINR +16,0 дБ при 39,0 Дж.

Спектральний аналіз підтвердив усунення паразитних височастотних коливань моменту рискання

8. Висновки

У роботі представлено комплексну математичну модель Fuzzy-SE3 та повністю розподілений алгоритм керування роєм БПЛА зі спрямованими антенами в умовах активної РЕБ. Отримані результати дають змогу зробити такі висновки:

1. **Ефективність:** метод забезпечує стійку перевагу до +29,5 дБ за SINR порівняно з існуючими розподіленими методами.

2. **Геометрична адаптація:** конформна ріманова метрика дозволяє рою автономно виявляти та оминати зони РЕБ без доступу до глобальної карти завод.

3. **Стійкість:** інтеграція C^∞ -гладкого нечіткого контролера усуває розриви градієнта; аналіз Ляпунова встановлює локальну експоненційну стійкість внутрішнього контуру та рівномірну граничну обмеженість за збурень; гібридна логіка перемикачів виключає поведінку Зенона.

4. **Практична цінність:** лінійна обчислювальна складність $O(N)$ робить алгоритм придатним до інтеграції в сучасні бортові обчислювачі для виконання завдань у складних умовах РЕБ.

Подальші дослідження будуть спрямовані на врахування аеродинамічної інтерференції між гвинтами агентів при близькому маневруванні та на інтеграцію методів навчання з підкріпленням для адаптації параметрів нечітких правил у реальному часі.

Література

1. Hulianytskyi, L., et al. (2025). Group Movement Optimization. IWSCI 2025, CEUR, 4036, P. 34–56.
2. Hulianytskyi, L.F. (2026). UAV swarms and their characteristics. Cybernetics and Systems Analysis. 62, No. 2, March, P. 241-254.
3. Yao, H. (2026). UAV Swarm Cooperation. Springer Nature.
4. Hulianytskyi, L., et al. (2025). Multi-Level Optimization. IT&I-2025, CEUR, 4158.
5. Son, N.S., et al. (2025). Steiner tree algorithms. J. Network Comput. Appl., 238, 104155.
6. Vicsek, T., et al. (1995). Phase Transition. Phys. Rev. Lett., 75(6), P. 1226-1229.
7. Reynolds, C.W. (1987). Flocks, Herds, Schools. ACM SIGGRAPH, 21(4), P. 25–34.
8. Kennedy, J., Eberhart, R. (1995). Particle Swarm. Proc. ICNN, 4, 1942-1948.
9. Olfati-Saber, R. (2006). Flocking. IEEE Trans. Autom. Control, 51(3), P. 401-420.
10. Lee, T., et al. (2010). Geometric Tracking on SE(3). Proc. CDC, P. 5420-5425.
11. Sial, M.B., et al. (2022). Distributed Formation Control. Drones, 6(9), 227.
12. Wei, X., et al. (2024). UAV-Aided Networks. Drones, 8(4), 152.
13. Mozaffari, M., et al. (2019). UAVs for wireless networks. IEEE Comm. Surveys, 21(3), P. 2334-2360.
14. Bu, Y., et al. (2024). UAV Swarm Formation Control. Drones, 8(7), 320.