

# КІБЕРНЕТИКА та КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

*Задача маршрутизації транспортних засобів відноситься до задач комбінаторної оптимізації час розв'язування яких можна суттєво скоротити при застосуванні квантових комп'ютерів. Переважна більшість розглянутих алгоритмів розв'язування задач маршрутизації у квантово-класичній хмарі ґрунтується на зведенні її до моделі квадратичної необмеженої бінарної оптимізації для вбудовування у спеціалізований процесор – квантовий відпалювач та використанні класичного комп'ютера для декомпозиції задачі і керування потоком операцій введення-виведення даних. Цей клас алгоритмів успішно застосовується у комерційних і дослідницьких структурах.*

**Ключові слова:** маршрутизація транспортних засобів, квантовий комп'ютер, відпал, комбінаторна оптимізація, задача комівоя-жера, кластеризація, кубіт.

© Л.Ф. Гуляницький, В.Ю. Корольов,  
О.М. Ходзінський, 2023

УДК 519.8

DOI:10.34229/2707-451X.23.2.3

Л.Ф. ГУЛЯНИЦЬКИЙ, В.Ю. КОРОЛЬОВ, О.М. ХОДЗІНСЬКИЙ

## ОГЛЯД АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦІЇ У КВАНТОВО-КЛАСИЧНІЙ ХМАРІ

**Вступ.** Квантові комп'ютери (КвК) мають потенційну перевагу перед класичними процесорами, оскільки, крім арифметичних і логічних операцій, у прикладних алгоритмах використовується квантова суперпозиція. Обчислювальна потужність сучасних квантових процесорів, також відомих як "шумливі квантові пристрої середнього масштабу", значно обмежена через малу кількість кубітів і зв'язків між ними, недосконалий контроль станів кубітів, короткий час когерентності та проблеми із корекцією помилок. Шум квантових обчислювальних пристроїв створює помилки, які впливають як на стан кубітів, так і на стабільність процесу знаходження глобального енергетичного мінімуму. Інша характеристика КвК – відношення часу стійкості кубітів і зв'язків між ними до часу обчислювальних операцій. Ця характеристика дозволяє оцінити, скільки арифметичних і логічних операцій можна виконати за час існування кубітів. Отже, цей параметр дає приблизну оцінку обчислювальної продуктивності квантової системи для виконання алгоритмів розв'язування задач.

Розв'язування задач комбінаторної оптимізації методом квантового відпалу вже широко використовується у різноманітних сферах економіки і науки [1], наприклад, у фінансовій сфері [2, 3], логістиці [4, 5], матеріалознавстві, хімії [6], фармацевтиці, біоінформатиці, обчислювальній біології [7, 8], поглибленому навчанні для тренування нейронних мереж [9]. Використання квантових обчислень у гібридних хмарних серверах та у симуляторах (комп'ютерних моделей) КвК дозволяє прискорити розв'язування багатьох відомих оптимізаційних задач на графах, а також класифікації, маршрутизації транспортних засобів, оптимізації інвестиційного портфеля, згортання білків та інших складних молекул, планування операцій, моделювання хімічних реакцій, дослідження лікарських засобів тощо. З 2004 року по 2022 рік опубліковано понад 1000 наукових робіт [10] на тему використання КвК для розв'язування задач маршрутизації, що показує перспективність цього напрямку досліджень для

вирішення логістичних проблем в Україні на базі гібридних квантово-класичних хмарних сервісів.

### Фізичні принципи розв'язування задач комбінаторної оптимізації на квантових комп'ютерах

Квантовий відпал на основі хмарних сервісів заснований на декількох метаевристичних алгоритмах розв'язування задач комбінаторної оптимізації з використанням адіабатичних квантових розрахунків [11–13], тобто відповідні фізичні процеси описуються адіабатичною теоремою із квантової механіки [14]. Розв'язування NP-складних задач на квантових комп'ютерах базується на використанні адіабатичної квантової оптимізації та відображенні задачі на стани квантової системи відповідно до Гамільтоніана  $H(t)$  [11].

Апаратний квантовий відпал здійснюється шляхом зміни стану системи кубітів від початкового квантового стану до кінцевого квантового стану шляхом еволюції у рамках моделі гамільтонової динаміки у відповідності до розв'язуваної задачі комбінаторної оптимізації [13]. Підготовлена квантова система потім адіабатично переходить у необхідний для розв'язання задачі квантовий стан, що характеризується значеннями спінів кубітів, енергією взаємодії між ними, загальною температурою квантового процесора, за час  $T$  згідно формули [11]:

$$H(t) \cong \left[1 - \frac{t}{T}\right] H_0 + \frac{t}{T} H_p,$$

коли час  $T$  досить великий, а  $H_0$  – стан системи з мінімальною енергією,  $H_p$  – стан системи з задачею, вбудованою в кубіти і зчеплення (зв'язки). Тоді система буде залишатися у стані з мінімальною енергією відповідно до адіабатичної теореми квантової механіки [14]. Час вирішення проблеми для системи з  $S$  спінів має порядок зростання  $O\left[\exp(\alpha S^\beta)\right]$ , де  $\alpha, \beta$  – додатні коефіцієнти [11]. Малоімовірно, що якісь NP-складні задачі можна розв'язати за поліноміальний час за допомогою адіабатичної квантової оптимізації. Однак, якщо побудовано квантову систему, де коефіцієнти  $\alpha, \beta$  будуть мати малі значення, то існує ймовірність, що алгоритм адіабатичної квантової оптимізації буде швидшим за класичні алгоритми для деяких класів задач.

### Розв'язування задач маршрутизації на квантових комп'ютерах методом відпалу

Побудова алгоритмів розв'язування задач маршрутизації на основі КвК базується на використанні моделі Гамільтона – Ізінга для NP-складних задач оптимізації [11, 15], яку за наявності  $S$  спінів  $s_i = \pm 1$  можна записати як спеціальну квадратичну функцію. Змінними є спін «поворот вгору» ( $\uparrow$ ) і спін «поворот вниз» ( $\downarrow$ ), тобто стани, які відповідають значенням  $+1$  і  $-1$ . Зв'язки між спінами називаються просто зв'язками і з точки зору теорії ймовірностей можуть відображати кореляції або антикореляції. Цільова функція, виражена як класична модель Ізінга, має вигляд:

$$H_{\text{Ising}}(s_1, \dots, s_S) = -\sum_{i < j} J_{ij} s_i s_j - \sum_{i=1}^S h_i s_i, \quad (1)$$

де  $s_i, s_j, i, j = 1, \dots, S$  – коефіцієнти, що відповідають зміщенню кубітів  $h_i$  (обертання спінів), а коефіцієнти  $J_{i,j}$  відповідають силам зв'язку (апаратно встановлювана кореляція) між такими кубітами. Обчислювальні квантові схеми розв'язування задач комбінаторної оптимізації базуються на моделі квадратичної необмеженої бінарної оптимізації (Quadratic Unconstrained Binary Optimization – QUBO), яка є ізоморфною до моделі Гамільтона – Ізінга з двійковими змінними [11, 16]:

$$\omega_i = \frac{1 + s_i}{2},$$

$$H_{QUBO}(\omega) = \sum_{i=1}^S Q_{i,i} \omega_i + \sum_{i < j}^S Q_{i,j} \omega_i \omega_j, \quad (2)$$

де  $Q_{i,i}$ ,  $Q_{i,j}$  елементи матриці  $\mathbf{Q}$ , які визначають за процедурою перерахування [11, 16] від (1) до (2),  $i, j = 1, \dots, S$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_S)$ ,  $\omega_i \in \{0, 1\}$ . Модель QUBO, яка використовує двійкові змінні, більш зручна для написання коду на класичних комп'ютерах.

### Постановка проблеми маршрутизації транспортного засобу

Проблеми маршрутизації транспортних засобів породжують низку класів задач комбінаторної оптимізації [17–19], сфера застосувань яких дуже широка – від комерційної та виробничої діяльності до використання у війсьній справі. Останнім часом нові постановки подібних задач інтенсивно досліджуються у зв'язку із стрімким застосуванням безпілотних літальних апаратів [20, 21].

Розглянемо задачу маршрутизації транспортних засобів (Vehicle Routing Problem – VRP), яка визначається набором клієнтів, які підлягають обслуговуванню, їх розташуванням і вимогами, а також інша основна інформація це відстані між клієнтами, відстань між клієнтом і депо, кількість транспортних засобів та їх вантажопідйомність.

Нехай  $M$  – кількість доступних транспортних засобів, а  $N$  – кількість клієнтів. Вважається заданим повний зважений граф  $G(V, E)$ , де множина  $V = \{v_1, \dots, v_{N+1}\}$  містить вершини, перші  $N$  з яких відповідають клієнтам, а  $v_{N+1}$  позначає депо, яке асоціюється зі складом постачальника;  $E$  – множина ребер.

Вага кожного ребра із множини  $E$  пов'язана з додатною вартістю переміщення між інцидентними вершинами. Позначимо  $c_{i,j}$  – вартість проїзду від вершини  $i$  до вершини  $j$ ,  $c_{i,N+1}$  для  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  – вартість прямого проїзду транспортного засобу від депо до пунктів призначення клієнтів, а  $c_{N+1,i}$  – від пункту призначення клієнтів до депо відповідно. Нехай змінна  $x_{i,j,k}$  відображає рух транспортного засобу, так:  $x_{i,j,k} = 1$ , якщо в заданих умовах  $i$ -й номер транспортного засобу відвідує вершину номер  $j$  на  $k$ -му кроці свого маршруту,  $i, j \in \{1, 2, \dots, N+1\}$  і  $k \in \{0, 1, 2, \dots, N+1\}$ , інакше  $x_{i,j,k} = 0$ . Маємо  $x_{i,N+1,0} = 1$  і  $x_{i,j,0} = 0$  для  $j < N+1$  (депо – це завжди перше місце в маршруті), і якщо  $x_{i,N+1,K} = 1$  для деякого  $K$ , то потім для  $k > K$   $x_{i,j,k} = 1$  (кожен транспортний засіб залишається в депо після його досягнення).

### Огляд алгоритмів розв'язання задачі маршрутизації транспортних засобів на КвК

**Повний розв'язувач QUBO (FQS – Full QUBO Solver).** У роботах [11, 12] запропонована постановка задачі маршрутизації з обмеженнями на вантажопідйомність транспортного засобу (Capacitated VRP – CVRP) як задачі квадратичної необмеженої бінарної оптимізації – QUBO. Спочатку задамо основну формулу QUBO, яка використовується для розв'язування екземплярів VRP. Формалізація проблеми базується на аналогічній постановці для задачі комівояжера (Traveling Salesman Problem – TSP) в [12, 22].

Введемо двійкову функцію:

$$D(y_1, \dots, y_N) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N y_i y_j - \sum_{i=1}^N y_i,$$

де  $y_i \in \{0, 1\}$  для  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $N$  – кількість вершин графа без депо постачальника.

Легко довести [22], що мінімальне значення  $D(y_1, \dots, y_N) \in -1$  і це значення може бути досягнуто тільки тоді, коли точно одне з  $y_1, \dots, y_N$  дорівнює 1. Відповідно до визначення VRP, отримаємо задачу мінімізації загальних витрат:

$$\min = P = \left\{ \sum_{f=1}^M \sum_{g=1}^N x_{f,g,1} c_{N+1,g} + \sum_{f=1}^M \sum_{g=1}^N x_{f,g,N} c_{g,N+1} + \sum_{f=1}^M \sum_{g=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} x_{f,i,g} x_{f,j,g+1} c_{i,j} \right\}. \quad (3)$$

Перший компонент в (3) – сума всіх витрат на проїзд транспортного засобу з депо – першої частини маршруту кожного транспортного засобу. Друга складова – це вартість решти маршрутів (повернення до депо) у конкретному випадку, коли один транспортний засіб обслуговує всі  $N$  замовлень (тільки в цьому випадку компонент може бути більшим за 0), решта визначає загальну вагу вартості всіх інших ребер, що входять до маршруту.

Щоб гарантувати, що кожна доставка обслуговується одним транспортним засобом і тільки один раз, слід включити наступний термін (в якому всі компоненти  $D \in -1$  лише в таких бажаних випадках) у формулі QUBO [22]:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^N D(x_{1,k,1}, x_{2,k,1}, \dots, x_{1,k,2}, \dots, x_{M,k,N}) + \sum_{f=1}^M \sum_{g=1}^N D(x_{f,k,g}, x_{f,2,g}, \dots, x_{f,N+1,g}).$$

Структура квантового процесора – це фізична реалізація неорієнтованого графа з кубітами як вершинами і зв'язками (зчепленнями), як ребрами між ними. З точки зору розв'язування задач у формулюванні як QUBO кожен кубіт у квантовому процесорі – змінна в моделі QUBO. З'єднання між кубітами представляють собою вартість або вагу ребра, пов'язану з парами кубітів, математично описаними в матриці  $\mathbf{Q}$  (2). За визначенням, VRP QUBO подання такої оптимізаційної задачі таке:

$$QUBO_{VRP} = B_1 \cdot P + B_2 \cdot \mathbf{W},$$

де значення констант  $B_1$  і  $B_2$  мають бути обрані таким чином, щоб розв'язок, знайдений квантовим відпалювачем, мінімізував функцію (2). Для того щоб відповідати вищенаведеним обмеженням (згідно з результатами тестів [22]) константи повинні мати значення:  $B_1 = 1$ ,  $B_2 = 10^7$ .

Група дослідників із Польщі запропонувала низку алгоритмів для розв'язування задач VPR/CVRP на основі розробленої обчислювальної схеми FQS, а також модифікації відомих алгоритми CVRP для класичних та гібридних квантово-класичних комп'ютерів від D-Wave [22]: наближений розв'язувач поділів множини пунктів, DBSCAN розв'язувач, алгоритм виокремлення розв'язків TSP. Розглянемо алгоритми, що ввійшли в цю схему.

#### **Наближений розв'язувач поділів множини пунктів.**

**Average Partition Solver** (APS) – це варіант повного розв'язку QUBO, який зменшує кількість змінних для кожного транспортного засобу, припускаючи, що кожен транспортний засіб обробляє приблизно однакову кількість замовлень.

**DBSCAN розв'язувач** (DS – DBSCAN Solver) – базується на DBSCAN (Density-based spatial clustering of applications with noise) [22, 23] і дозволяє використовувати квантовий відпал у поєднанні з цим класичним алгоритмом. DS використовує рекурсивний DBSCAN як алгоритм кластеризації з обмеженим розміром кластера. Потім TSP розв'язується для кожного кластера окремо за допомогою FQS. Алгоритм DS може розв'язувати CVRP, якщо всі корисні навантаження транспортних засобів рівні.

**Алгоритм виокремлення розв'язків TSP (Solution Partitioning Solver – SPS).** Оскільки додавання обмежень місткості транспортного засобу до моделі не є простим завданням, можна знайти розв'язок на основі результатів, отриманих за допомогою DS [22]. Алгоритм SPS розбиває розв'язки задачі TSP, знайдене іншим алгоритмом, наприклад, DS, на послідовні інтервали маршрута, які є розв'язками задачі CVRP.

Ефективність алгоритмів від посередньої до кращої наступна: FQS, APS, DS, SPS [22].

#### **Алгоритм маршрутизації CVRP з плануванням**

Розглянемо постановку проблеми CVRP запропоновану дослідниками з Японії, яка враховує розклад та описує зміни стану транспортного засобу в часі для кожного транспортного засобу під час поїздки [24] (збільшення або зменшення одиниць вантажу). Існують обмеження на вантажопідйомність транспортного засобу, які дозволяють збільшувати і зменшувати навантаження відповідно до клієнтів до яких проїздять транспортні засоби. Опис стану транспортного засобу дозволяє встановити різні правила подорожі в залежності від стану кожного транспортного засобу.

#### **Гібридний метод розв'язування задачі маршрутизації транспортних засобів різної вантажопідйомності за допомогою квантового відпалювача**

У серії статей подається спосіб декомпозиції CVRP на менші задачі оптимізаційної задачі, які розв'язуються послідовно [12]: кластеризація та маршрутизація. Кластеризація транспортних засобів сформульована в термінах задачі про ранець. Евклідова відстань між кластеризованими клієнтами для транспортного засобу вказана як мінімальна. Маршрутизація всередині отриманих кластерів розглядається як задача TSP. Розроблений гібридний алгоритм [12] використовує класичний комп'ютер для розв'язування задачі про ранець і квантовий відпал D-Wave для розв'язування TSP, але також можливо розв'язувати всю задачу на КК, якщо кількість кубітів достатня. Основа обчислювального алгоритму – схема QUBO.

#### **Алгоритм маршрутизації на основі варіаційного пошуку власних значень**

Варіаційний квантовий Eigensolver (VQE), реалізований для квантових комп'ютерів IBM [25], поєднує в собі класичні і квантові алгоритми оптимізації та квантові оператори і логічні вентиля, які також називають квантовими варіаційними формами [15]. Обмежена кількість кубітів і зв'язків у існуючих квантових комп'ютерах та їх недосконалість ускладнюють визначення прискорення алгоритму, бо отриманий алгоритм є по суті евристичним. Оскільки квантовий комп'ютер IBM – універсальний, а не спеціалізований як у D-Wave, розробники побудували модель Гамільтона – Ізінга, використовуючи квантові логічні вентиля та оператори, а потім перевели її в модель QUBO [26]. Тобто звели задачу до вже розв'язаної. Точність розв'язку задачі маршрутизації на квантовому комп'ютері IBM приблизно така ж, як і на квантовому комп'ютері D-Wave без класичного комп'ютера.

#### **Алгоритми, що ґрунтуються на використанні КвК як сопроцесора у нейромережі**

Алгоритми базуються на відомих способах використання нейромереж [27, 28] до розв'язування VRP і TSP, а оптимізація вагових коефіцієнтів нейромережі (reinforced learning) виконується за допомогою КвК Rigetti Aspen-8 на базі квантових логічних вентилів [27] або з використання квантового відпалювача фірми D-wave [28]. Задачі маршрутизації розв'язувались на тестових прикладах малої розмірності, якість розв'язків порівняна з попередніми алгоритмами для графів з малою кількістю вершин.

#### **Побудова оптимальних маршрутів на базі мінімаксної постановки задачі**

Мета розробки алгоритму [29] було зменшення кількості використовуваних змінних потрібних для розв'язування задачі; досягнуто зменшення кількості змінних з  $N^3$  до  $3N^2$ , де  $N$  – кількість клієнтів для відвідування, що відповідно дозволило зменшити потрібних для обчислень кубітів КвК з  $0.8(N+2)^5$  до  $2(N+2)^3$ . КвК розв'язують задачі у формі QUBO – квадратичних поліномів.

На думку авторів даної статті, одна з проблем низької точності розв'язків задачі маршрутизації транспортних засобів на КвК – те, що обмеження для цієї задачі утворюють поліноми вищого порядку, котрі зводять до квадратичних за допомогою введення додаткових змінних. Це призводить до зростання кількості потрібних для розв'язування задачі кубітів і зв'язків, що ускладнює термостабілізацію квантової системи та погіршує точність апаратного квантового відпалу.

Суть запропонованої постановки задачі це введення спрямованих ребер і впорядкування вибору транспортних засобів для руху по маршруту на основі нових формулювань обмежень для пошуку розв'язку. Наведені результати чисельних експериментів [29] показують кращу якість розв'язку порівняно з алгоритмом комбінаторної оптимізації маршруту з програмної бібліотеки D-wave, але суттєво більший час розв'язування задачі. Тестування запропонованої авторами статті [29] програми [30] показало, що запропонована постановка задачі дозволяє розв'язувати тестові TSP, але навіть у тестовій задачі маршрутизації для шести міст і двох машин система D-wave не змогла знайти спосіб відображення квадратичної бінарної моделі на кубіти і зчеплення КвК. Запрограмовані симульований відпал та імітаційний квантовий відпал [30] знаходять розв'язки TSP і VRP.

**Висновки.** Розглянуті алгоритми квантової оптимізації є наближеними і належать до класу квантово-класичних гібридних варіаційних алгоритмів методу відпалу. Основний стан квантового процесора побудовано на моделі Ізінга – Гамільтона, яка використовується для розв'язування задач комбінаторної оптимізації. Такі комп'ютери можуть виконувати обчислення лише з обмеженою глибиною квантової схеми, оскільки принцип роботи таких відпалювачів заснований на адиабатичній еволюції у часі квантової системи за виділений час.

Так відбувається тому, що в загальному алгоритмі наближеної квантової оптимізації замість того, щоб поступово слідувати за еволюцією адиабатичного стану, обчислювальні схеми намагаються сформулювати розв'язок, використовуючи обмежену кількість кроків та евристики. З іншого боку, неточності у роботі наближених алгоритмів квантової оптимізації при більш високих значеннях кількості кроків еволюції адиабатичного стану формують більше локальних мінімумів цільової функції. Ця обставина ускладнює вибір кращого розв'язку, тому необхідну кількість кроків слід підбирати за евристичним принципом та емпіричними підходами.

Наближений алгоритм квантової оптимізації використовується для розв'язування задачі VRP зі скінченною кількістю кроків адиабатичної еволюції і не гарантує, що отриманий розв'язок відповідає глобальному оптимальному розв'язку вихідної задачі. Подання інших NP-складних задач комбінаторної оптимізації відповідно до моделі Ізінга дозволяє пришвидшити їх розв'язування завдяки квантовій перевазі, хоча і вимагає розроблення нових підходів до подання цих задач у вигляді, придатному для застосування КвК.

#### Список літератури

1. 250+ Early Quantum Applications <https://www.dwavesys.com/learn/featured-applications/> (звернення: 26.01.2023)
2. Goodlabs: How We Built a Real-Time Quantum Liquidity Optimizer for Wholesale Payments. <https://www.dwavesys.com/events-section/events/goodlabs-how-we-built-a-real-time-quantum-liquidity-optimizer-for-wholesale-payments/> (звернення: 26.01.2023)
3. D-Wave and Mastercard Take Quantum Leap into Future of Financial Services <https://www.dwavesys.com/company/newsroom/press-release/d-wave-and-mastercard-take-quantum-leap-into-future-of-financial-services/> (звернення: 26.01.2023)
4. Quantum Computing Application Sees Real World Success at Pier 300 at The Port of Los Angeles <https://www.prnewswire.com/news-releases/quantum-computing-application-sees-real-world-success-at-pier-300-at-the-port-of-los-angeles-301455106.html> (звернення: 26.01.2023)
5. Logistics Optimization: Port of Los Angeles <https://www.dwavesys.com/events-section/events/logistics-optimization-port-of-los-angeles/?d=04-12-2022> (звернення: 26.01.2023)

6. Quantum molecule unfolding <https://www.quantumcomputinglab.cineca.it/en/2021/08/25/quantum-molecule-unfolding-2/> (звернення: 26.01.2023)
7. Menten AI is Reimagining Biology with Quantum-Powered Protein Design <https://www.dwavesys.com/media/exqjbloj/dwave-menten-ai-case-story-v10.pdf> (звернення: 26.01.2023)
8. Menten AI Battles COVID-19 with Quantum Peptide Therapeutics <https://www.dwavesys.com/media/kjoflcdh/dwave-menten-ai-case-story-2-v4.pdf> (звернення: 26.01.2023)
9. D-Wave Customer Applications | Qubits 2020 <https://www.youtube.com/watch?v=oBUaffN7KMY> (звернення: 26.01.2023)
10. Osaba E., Villar-Rodriguez E., Oregi I., A Systematic Literature Review of Quantum Computing for Routing Problems. *IEEE Access*, 2022, Vol. 10, pp. 55805-55817. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3177790>
11. Lucas A. Ising formulations of many NP problems. *Front. Physics*. 2014. Vol. 2. <https://doi.org/10.3389/fphy.2014.00005>
12. Feld S., Roch C., Gabor T., Seidel C., Neukart F., Galter I., Mauerer W., Linnhoff-Popien C. A Hybrid Solution Method for the Capacitated Vehicle Routing Problem Using a Quantum Annealer. *Front. ICT* 2019. Vol. 6. <https://doi.org/10.3389/fict.2019.00013>
13. Hari Krishnakumar R., Nannapaneni S., Nguyen N.H., Steck J.E., Behrman E.C. A Quantum Annealing Approach for Dynamic Multi-Depot Capacitated Vehicle Routing Problem. 2020. <http://arxiv.org/abs/2005.12478v2>
14. Kato T. On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1950. Vol. 5, No. 6. P. 435–439. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.5.435>
15. Asfaw A. Learn Quantum Computation using Qiskit. URL: <https://qiskit.org/textbook/ch-applications/qaoa.html> (звернення: 26.01.2023)
16. How to show mathematically the equivalency between Ising Model and QUBO? <https://quantumcomputing.stackexchange.com/questions/21564/how-to-show-mathematically-the-equivalency-between-ising-model-and-qubo?rq=1> (звернення: 26.01.2023)
17. Toth P., Vigo D. Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition, MOS-SIAM Series on Optimization 18. SIAM, Philadelphia. 2014. P. 481. ISBN 1611973589
18. Golden B.L., Raghavan S., Wasil E.A. (eds.). The Vehicle Routing Problem: latest advances and new challenges. 2008. Vol. 43. Springer Science & Business Media. ISBN 0387777776.
19. Гуляницький Л.Ф., Коткова А.А. До класифікації задач маршрутизації транспортних засобів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія "Математика і інформатика"*. 2020. 1 (36). С. 73–84. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).73-84](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).73-84)
20. Golden B., Wang X., Wasil E. The Evolution of the Vehicle Routing Problem – A Survey of VRP Research and Practice from 2005 to 2022. *The Evolution of the Vehicle Routing Problem. Synthesis Lectures on Operations Research and Applications*, Springer, Cham. 2023. P. 1–64. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18716-2\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18716-2_1)
21. Горбулін В.П., Гуляницький Л.Ф., Сергієнко І.В. Оптимізація маршрутів команди БПЛА за наявності альтернативних та динамічних депо. *Кібернетика і системний аналіз*. 2020. 2 (56). С. 31–41. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/KSA\\_2020\\_56\\_2\\_6](http://nbuv.gov.ua/UJRN/KSA_2020_56_2_6)
22. Borowski M. et al. New Hybrid Quantum Annealing Algorithms for Solving Vehicle Routing Problem. In: Krzhizhanovskaya V. et al. (eds). *Computational Science – ICCS 2020. ICCS 2020. Lecture Notes in Computer Science*, 2020. Vol. 12142. P. 546–561. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-50433-5\\_42](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50433-5_42)
23. Martin E., Hans-Peter K., Jörg S., Xiaowei Xu A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96)*. AAAI Press. 1996. P. 226–231. CiteSeerX 10.1.1.121.9220. ISBN 1-57735-004-9.
24. Irie H., Wongpaisarnsin G., Terabe M., Miki A., Taguchi S. Quantum Annealing of Vehicle Routing Problem with Time, State and Capacity. In: Feld S., Linnhoff-Popien C. (eds) *Quantum Technology and Optimization Problems. QTOP 2019. Lecture Notes in Computer Science*, 2019. Vol. 11413. P. 145–156. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-14082-3\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14082-3_13)
25. Vehicle Routing Optimization [https://qiskit.org/documentation/optimization/tutorials/07\\_examples\\_vehicle\\_routing.html](https://qiskit.org/documentation/optimization/tutorials/07_examples_vehicle_routing.html) (звернення: 26.01.2023)
26. Корольов В.Ю., Ходзінський О.М. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на квантових комп'ютерах. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2020. 2. С. 5–13. <https://doi.org/10.34229/2707-451X.20.2.1>
27. Sanches F., Weinberg S., Ide T., Kamiya K. Short quantum circuits in reinforcement learning policies for the vehicle routing problem. *Phys. Rev. A*. 2022. 105. 062403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.105.062403>

28. Gabor T., Feld S., Safi H., Phan T., Linnhoff-Popien C. Insights on Training Neural Networks for QUBO Tasks. *ICSEW'20: Proceedings of the IEEE/ACM 42nd International Conference on Software Engineering Workshops*. 2020. P. 436–441 <https://doi.org/10.1145/3387940>.
29. Gonzalez-Bermejo, S.; Alonso-Linaje, G.; Atchade-Adelomou, P. GPS: A New TSP Formulation for Its Generalizations Type QUBO. *Mathematics*. 2022. **3** (10). 416. <https://doi.org/10.3390/math10030416>
30. QUBO formulation of TSP and VRP in terms of the minimum number of necessary variables <https://github.com/pifparfait/GPS> (звернення: 26.01.2023)

Одержано 21.06.2023

**Гуляницький Леонід Федорович,**

доктор технічних наук, завідувач відділом  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,  
<https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>  
[leonhul.icyb@gmail.com](mailto:leonhul.icyb@gmail.com)

**Корольов Вячеслав Юрійович,**

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,  
<https://orcid.org/0000-0003-1143-5846>

**Ходзінський Олександр Миколайович,**

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,  
<https://orcid.org/0000-0003-4574-3628>

УДК 519.8

Л.Ф. Гуляницький\*, В.Ю. Корольов, О.М. Ходзінський

## Огляд алгоритмів розв'язування задач маршрутизації у квантово-класичній хмарі

*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ*

\* Листування: [leonhul.icyb@gmail.com](mailto:leonhul.icyb@gmail.com)

**Вступ.** Сподівання на вирішення проблеми лавиноподібного зростання вимог до обчислювальних потужностей, потрібних для розв'язування складних задач маршрутизації, та інших задач комбінаторної оптимізації, покладається на новітні квантові обчислювачі у розробку яких урядами і корпораціями вкладаються багатомільярдні інвестиції.

У статті розглянуто сучасні алгоритми маршрутизації та виконано їх аналіз і верифікацію, якщо автори алгоритму надали відповідні тестові програми.

**Мета роботи** – розглянути сучасний стан розвитку сфери розробки алгоритмів маршрутизації для гібридних квантово-класичних хмар, проаналізувати їх та запропонувати класифікацію алгоритмів.

**Результати.** Сучасні квантові комп'ютери (КвК) дозволяють швидше знаходити наближені розв'язки низки математичних задач порівняно з класичними комп'ютерами. Неточність розв'язків отриманих на КвК є наслідком фізичних і технологічних обмежень: помилки обчислень викликані тепловими шумами, мала кількість обчислювальних елементів – кубітів і зв'язків між ними, що потребує виконання декомпозиції задачі та застосування евристичних алгоритмів.

Аналіз підходів до розв'язку оптимізаційних задач на КвК дозволяє виділити: квантовий відпал та варіаційний пошук власних значень на базі квантових логічних вентилів як загальні напрямки розробки переважної більшості алгоритмів розв'язування задач маршрутизації. Розглянуті алгоритми зводять задачу маршрутизації транспортних засобів до задачі квадратичної необмеженої бінарної оптимізації, яка є ізоморфною до моделі Гамільтона-Ізінга. У такому вигляді задача є придатною до вбудовування у КвК, який знаходить наближений розв'язок, що має найкращу статистичну достовірність або відповідає квантовому стану з найменшою енергією.

Як окремий клас можна виділити алгоритми маршрутизації транспортних засобів для класичних комп'ютерів, які використовують квантові обчислення для прискорення розв'язування задачі. Напри-



клад, неймережі, що обчислюють вагові коефіцієнти за допомогою КвК або мурашиний алгоритм, який обчислює феромонний слід у гібридній хмарі. Слід згадати квантово-натхнені алгоритми, що базуються на програмних засобах симуляції КвК і відповідних бібліотеках та дозволяють створювати результативний клас алгоритмів розв'язування задач маршрутизації транспортних засобів.

**Висновки.** Об'єднання апаратного квантового відпаду з низкою програмних засобів для обчислення оптимізаційних задач для класичних комп'ютерів у гібридний квантово-класичний хмарний сервіс дозволяє отримати переваги у швидкості і точності деяких типів складних оптимізаційних задач комерційного масштабу, зокрема, маршрутизації транспортних засобів, що вже зараз приносить суттєвий прибуток низці корпорацій.

**Ключові слова:** маршрутизація транспортних засобів, квантовий комп'ютер, відпад, комбінаторна оптимізація, задача комівояжера, кластеризація, кубіт.

MSC 90C27, 68Q12

Leonid Hulianitskyi\*, Vyacheslav Korolyov, Oleksandr Khodzinskyi

## An Overview of Algorithms for Solving Vehicle Routing Problems in the Quantum-Classical Cloud

*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv*

\*Correspondence: [leonhul.icyb@gmail.com](mailto:leonhul.icyb@gmail.com)

**Introduction.** The hope of solving the problem of the avalanche-like growth of requirements for computing power, essential for solving complex routing problems and other problems of combinatorial optimization, relies on the latest quantum computers, in the development of which governments and corporations invest multi-billion investments.

The article examines modern routing algorithms and performs their analysis and verification, if the authors of the algorithm provided appropriate test programs.

**The purpose** of the article is to review the current state of development in the field of development of routing algorithms for hybrid quantum-classical clouds, analyze them and propose a classification of algorithms.

**Results.** Modern quantum computers (QCs) make it possible to find approximate solutions to some of mathematical problems faster than classical computers. The inaccuracy of the solutions obtained by the QC is a consequence of physical and technological limitations: calculation errors are caused by thermal noise, a small number of computational elements - qubits and connections between them, which requires the decomposition of the problem and the use of heuristic algorithms.

The analysis of approaches to the solution of optimization problems on QC allows us to single out: quantum response and variational search of eigenvalues based on quantum logic gates as the general directions of development of the vast majority of algorithms for solving routing problems. The considered algorithms reduce the vehicle routing problem to a quadratic unconstrained binary optimization problem, which is isomorphic to the Hamilton-Ising model. In this form, the problem is suitable for embedding in QC, which finds an approximate solution that has the best statistical reliability or corresponds to the quantum state with the lowest energy.

As a separate class, vehicle routing algorithms for classical computers that use quantum computing to accelerate problem solving can be distinguished. For example, neural networks that calculate weighting factors using QC or an ant algorithm that calculates a pheromone trail in a hybrid cloud. It should be mentioned the quantum-inspired algorithms, which are based on software tools for the simulation of QC and the corresponding libraries and allow creating an effective class of algorithms for solving problems of vehicle routing.

**Conclusions.** Combining hardware quantum annealing with a number of software tools for calculating optimization problems for classical computers in a hybrid quantum-classical cloud service allows to obtain advantages in speed and accuracy of some types of complex optimization problems of a commercial scale, in particular, routing vehicles, which is already bringing substantial profits to a number of corporations.

**Keywords:** vehicle routing problem, quantum computer, annealing, combinatorial optimization, traveling salesman problem, clustering, qubit.