УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ, Л.Ф. ГУЛЯНИЦКИЙ

РАЗРЕЗЫ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ. I

Аннотация. Исследованы новые свойства разрезов в неориентированных графах, приведены различные модели для задачи максимального разреза на основе установленного соответствия между разрезами в заданном графе и специфическими базами расширенного полиматроида, ассоциированного с этим графом. Для модели, сформулированной как задача нахождения максимума выпуклой функции на компактном множестве — расширенном полиматроиде, доказано, что локальные и глобальные максимумы совпадают по значению целевой функции, т.е. для решения задачи максимального разреза достаточно найти базу расширенного полиматроида как локальный или глобальный максимум целевой функции.

Ключевые слова: графы, разрезы, выпуклая функция, специальные многогранники.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемые новые свойства разрезов в неориентированных графах могут быть положены в основу новых алгоритмов решения задач нахождения различных разрезов. Множество ребер, удаление которых приводит к несвязанному графу, является разрезом связного графа. Во взвешенном неориентированном графе, если сумма весов удаленных ребер максимальна (минимальна), разрез называется максимальным (минимальным). Очевидно, что удаление всех ребер, не принадлежащих разрезу, приводит к остовному двудольному подграфу. При этом допускается, что двудольный подграф может содержать изолированные вершины. Поэтому задачу нахождения максимального (минимального) разреза можно сформулировать как определение остовного двудольного подграфа максимального (минимального) веса. Различные приложения задачи максимального разреза при проектировании СБИС, в статистической физике [1] и других областях рассматриваются именно в такой постановке. Эта задача является NP-трудной даже в случае, когда веса всех ребер одинаковы [2–4].

Общим у известных алгоритмов решения задачи минимального разреза является то, что они предназначены для максимизации количества потоков на ребрах, т.е. для определения оптимального решения прямой и двойственной задач. При этом временные затраты можно представить, в основном, кубической функцией от числа вершин. В отличие от задачи минимального разреза, для решения задачи максимального разреза в настоящее время не существует полиномиальных алгоритмов, хотя и предложено много методов. Однако ни один из них не имеет таких преимуществ, чтобы его можно было считать более эффективным средством решения этой задачи.

Методы целочисленного или нелинейного программирования, как правило, применяются для решения задачи максимального разреза. Например, в [5] она формулируется как задача линейного целочисленного программирования с булевыми переменными, а в [6] — как задача квадратичного программирования в терминах переменных, принимающих одно из двух дискретных значений в зависимости от принадлежности вершин к долям двудольного остовного подграфа.

Однако в упомянутых и других публикациях в применяемых алгоритмах специфика задач явно не учитывается. В отличие от приведенных подходов, в полиномиальных алгоритмах для решения задачи максимального разреза на планарных [7–9] и почти двудольных графах [10, 11], а также на серийно-параллельных графах [12] специфики этих графов учтены.

Методы аппроксимации для задачи максимального разреза с гарантией решения за полиномиальное время детально изложены в [13]. Свойства этой задачи на основе характеристики собственных чисел матрицы смежности изучены в [14]. Формулировка в [15] задачи максимального разреза как задачи полуопределенного программирования представляет интерес, поскольку найденное решение предложенным алгоритмом гарантирует 0.887 точности. Анализ временной сложности решений стандартных тестовых задач на случайно генерированных графах [16] показал, что трудоемкость алгоритма [15] сильно увеличивается при решении задачи на больших графах (с числом вершин более 500). Также констатируется, что, используя приближенное решение подзадач на каждой итерации, можно существенно улучшить быстродействие алгоритма [16], причем значение целевой функции при решении тестовых задач будет таким же, как и при их решении алгоритмом [15]. Однако утверждается, что алгоритм [16] теоретически гарантирует только 0.39 точности решения задачи максимального разреза.

Цель настоящей работы — показать новые свойства задачи максимального и минимального разрезов, а также рассмотреть особенности построения исследованной в [17] модели.

Далее при описании свойства рассматриваемой задачи вместо терминов «база», «полиматроид» и «расширенный полиматроид» часто используются термины «крайняя точка» и «многогранник». Кроме этого, в зависимости от контекста $|V|$ и $|E|$ заменены n и m соответственно. Также доказано, что приведенная в [17] математическая модель задачи максимального разреза как нахождение максимума выпуклой функции на многограннике не имеет локальных экстремумов в том смысле, что локальные и глобальные экстремумы совпадают по значению целевой функции. Поэтому необходимое условие оптимальности решения задачи максимального разреза в терминах субградиентов целевой функции можно выразить так же, как и в выпуклом программировании. Как следствие этого факта показано, что для отыскания оптимального решения задачи можно применить итерационную схему, аналогичную используемым в субградиентных методах. Также показано, что для заданного графа можно построить некоторую сеть, в которой пропускная способность произвольного минимального разреза, отделяющего источник от стока, равна мощности максимального разреза в этом графе. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи максимального разреза в неориентированном графе в терминах теории потоков. Рассмотрены примеры задачи.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть задан простой неориентированный связный граф $G=(V,E)$ с множествами вершин V и ребер E, а также неотрицательные веса c_e ребер $e \in E$. Для произвольного $S \subseteq V$ рассмотрим подмножества $\kappa(S)$ и $\gamma(S)$, содержащие ребра хотя бы с одной и с обеими конечными вершинами в S соответственно. Из определения этих подмножеств следует, что множество ребер из $\delta(S)=\kappa(S)\setminus\gamma(S)$ является разрезом, определенным подмножеством вершин $S \subseteq V$. Обозначим R^V (R^E) множество $\{(u(v): v \in V): u(v) \in R, v \in V\}$ $(\{(u(e):$

$e \in E): u(e) \in E, e \in E\})$. Для произвольных $T \subseteq V$, $T \subseteq E$ и $u \in R^V$, $u \in R^E$ вместо $\sum_{k \in T} u_k$ используем обозначение $u(T)$.

Пусть $c(\kappa(S))$ и $c(\gamma(S))$ — суммы весов ребер из $\kappa(S)$ и $\gamma(S)$. Известно, что $\varphi(S) = c(\kappa(S))$ — субмодулярная функция, т.е.

$$\varphi(S) + \varphi(T) \geq \varphi(S \cup T) + \varphi(S \cap T),$$

и $\omega(S) = c(\gamma(S))$ — супермодулярная функция, т.е.

$$\omega(S) + \omega(T) \leq \omega(S \cup T) + \omega(S \cap T),$$

для произвольных подмножеств S и T множества V. Ассоциированные с этими функциями многогранники

$$P(\varphi) = \{x \in R^V : x \geq 0, x(S) \leq \varphi(S), S \subseteq V\},$$

$$Q(\omega) = \{y \in R^V : y \geq 0, y(S) \geq \omega(S), S \subseteq V\}$$

называются полиматроидом и суперполиматроидом соответственно. Из определений $\varphi(S)$, $\omega(S)$ следует, что они монотонные функции и $\varphi(V) = \omega(V) = c(E)$. Векторы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, если $x(V) = c(E)$ и $y(V) = c(E)$. Известно, что относительно каждого линейного упорядочения L вершин графа $G = (V, E)$ гриди алгоритм определяет соответствующие базы $x^L \in P(\varphi)$ и $y^L \in Q(\omega)$. Далее для краткости будем считать, что базы x и y порождены по линейному упорядочению L. В дальнейшем, если это не приведет к неоднозначному трактованию, вместо x^L и y^L используем обозначения x и y.

Согласно линейному упорядочению L вершин можно ориентировать ребра графа $G = (V, E)$ таким образом, что полученный орграф будет ациклическим ориентированным графом. Для этого нужно заменить каждое ребро (v, u) дугой vu, если $v \prec_L u$, или дугой uv, если $u \prec_L v$. Обратное тоже верно, т.е. каждое ациклическое ориентирование ребер графа $G = (V, E)$ определяет линейное упорядочение L вершин. В ациклическом ориентированном графе $G = (V, E)$ с весами c_{vw} на дугах множество входящих и выходящих из вершины v ребер обозначим $\delta_-(v)$ и $\delta_+(v)$ соответственно. Из нахождения баз $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ гриди алгоритмом следует, что

$$\sum_{u \in \delta_+(v)} c_{vu} = x_v, v \in V, \tag{1}$$

$$\sum_{u \in \delta_-(v)} c_{uv} = y_v, v \in V, \tag{2}$$

в ациклическом ориентированном графе $G = (V, E)$, где x_v — сумма весов на дугах, выходящих из вершины v, и y_v — сумма весов на дугах, входящих в вершину v. Равенства (1), (2) выполняются для произвольных баз $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$, порожденных по произвольному линейному упорядочению L вершин графа $G = (V, E)$. Таким образом, доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть базы порождены по линейному упорядочению L вершин графа $G = (V, E)$. Тогда $x + y = d$, где $d = (d_v; v \in V)$ — n-мерный вектор и $d_v = c(\delta(v)) = \sum_{(v,w) \in E} d_{vw}$ для всех вершин $v \in V$.

Пусть $L=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $I=(v_n, \ldots, v_2, v_1)$ — линейные упорядочения вершин графа $G=(V, E)$. Рассмотрим два ациклических ориентированных графа, полученных соответственно после ориентации каждого ребра (v_i, v_j) из E с учетом порядка вершин v_i и v_j в упорядочениях L и I. Из равенств (1) и (2), рассмотренных для этих ациклических ориентированных графов, непосредственно следует доказательство приведенного далее утверждения.

Утверждение 2. Пусть $y^1=d-x^1$ и $y^2=d-x^2$, где базы $x^1 \in P(\varphi)$ и $x^2 \in P(\varphi)$ порождены по линейному упорядочению L и I соответственно. Тогда $x^2=y^1 \in Q(\omega)$ и $x^1=y^2 \in Q(\omega)$.

Функция $\varphi(S)-\omega(S)$ называется разрезной, а из определения функций $\varphi(.)$ и $\omega(.)$ следует, что она субмодулярная и $c(\delta(S))=\varphi(S)-\omega(S)$. Следующий многогранник, ассоциированный с этой функцией,

$$EP(\varphi-\omega)=\{z \in R^V: z(S) \leq \varphi(S)-\omega(S), S \subseteq V\}$$

называется расширенным полиматроидом (extended polymatroid) [22]. Из утверждений 1, 2 следует, что если базы x и y порождены по линейному упорядочению L, то вектор $z=x-y \in EP(\varphi-\omega)$ и $z(V)=0$, так как $\varphi(V)=\omega(V)=$ $=c(E)$. Такой вектор z называется базой расширенного полиматроида $EP(\varphi-\omega)$, которая также может быть порожденной по линейному упорядочению L. Нетрудно видеть, что произвольная база z расширенного полиматроида представима в виде $z=x-y$. Из $z(V)=0$ следует, что равенство $\sum(z_v: z_v>0)=$ $=-\sum(z_v: z_v \leq 0)$ выполняется для базы $z=x-y$ расширенного полиматроида $E(\varphi-\omega)$, которое назовем нулевой суммой.

Утверждение 3. Базы $x \in P(\varphi)$, $y \in Q(\omega)$ и $z \in EP(\varphi-\omega)$ могут быть порожденными по произвольному линейному упорядочению L за время $O(m)$.

Доказательство. Пусть $L=(v_1, \ldots, v_n)$ и $L_i=(v_1, \ldots, v_i)$ для $i=1, \ldots, n$. По формулам гриди алгоритма $x_{v_i}=\varphi(L_i)-\varphi(L_{i-1})=c(\delta_+(v_i)) \geq 0$, т.е. x_{v_i} является суммой весов ребер $(v_i, v_j) \in E$, для которых $v_i \prec_L v_j$ в L. Таким образом, при определении базы x каждое ребро учитывается один раз, поэтому требуемое время равно $O(m)$. Поскольку базы $y=d-x \in Q(\omega)$ и $z=x-y \in EP(\varphi-\omega)$ также порождены по линейному упорядочению L, их тоже можно определить за время $O(m)$. ■

2. РАЗРЕЗЫ И БАЗЫ ПОЛИМАТРОИДА

Покажем, что существует однозначное соответствие между разрезами в графе $G=(V, E)$ и некоторыми базами из расширенного полиматроида $EP(\varphi-\omega)$, где функции φ и ω определены ранее на подмножествах множества вершин этого графа. Обозначим $\bar{S}=V \setminus S$ для каждого непустого подмножества $S \subset V$. Ясно, что после удаления ребер из множеств $\gamma(S)$ и $\gamma(\bar{S})$ полученный остовной подграф $H=(S, \bar{S}, A)$ двудольный, причем допускается, что в H могут быть изолированные вершины. Иными словами, подмножество ребер A является разрезом $\delta(S)$ в неориентированном графе $G=(V, E)$. Пусть $d_H(v)$ обозначает сумму весов ребер с конечной вершиной v в подграфе H. Каждому разрезу $\delta(S)$ в грфе $G=(V, E)$ сопоставим вектор $z_S=(z_S(v): v \in V)$, где

$$z_S(v)=\begin{cases} d_H(v), & \text{если } v \in S, \\ -d_H(v), & \text{если } v \in \bar{S}. \end{cases}$$

Теорема 1. Для произвольного непустого подмножества вершин $S \subset V$ вектор z_S, соответствующий разрезу $\delta(S)$, является базой расширенного полиматроида $EP(\varphi - \omega)$.

Доказательство. Рассмотрим линейное упорядочение вершин $L = (S, \bar{S})$, т.е. $v \prec_L w$ для каждой вершины $v \in S$ и $w \in \bar{S}$. Не нарушая общности, можем предполагать, что $v_1 \prec_L v_2 \prec_L, \dots, \prec_L v_p$ и $v_{p+1} \prec_L, \dots, \prec_L v_n$ в S и $\bar{S}$ соответственно. Ясно, что $z^1 = x^1 - y^1 \in EP(\varphi - \omega)$ для баз $x^1 \in P(\varphi)$ и $y^1 \in Q(\omega)$, порожденных по L.

Теперь рассмотрим линейное упорядочение вершин $I = (S, \bar{S})$, в котором вершины в S и $\bar{S}$ упорядочены в обратном порядке, т.е. $v_p \prec_L, \dots, \prec_L v_1$ и $v_n \prec_L, \dots, \prec_L v_{p+1}$. Имеем $z^2 = x^2 - y^2 \in EP(\varphi - \omega)$ для баз $x^2 \in P(\varphi)$ и $y^2 \in Q(\omega)$, порожденных по I.

Рассмотрим ациклические ориентированные графы G_1 и G_2, полученные после замены каждого ребра из E дугой в соответствии с линейным упорядочением вершин L и I. Если в G_1 дуга $v_i v_j$ с конечными вершинами $v_i, v_j \in S$ или $v_i, v_j \in \bar{S}$ направлена из вершины v_i в вершину v_j, то в G_2 она направлена из v_j в v_i. При этом в графах G_1 и G_2 каждое ребро разреза $\delta(S)$ заменяется дугой, направленной из вершин S к вершинам $\bar{S}$. Поэтому $x_u^1 = y_u^2$ и $x_u^2 = y_u^1$ для изолированных вершин u в подграфе H. Если вершины $v \in S$ и $w \in \bar{S}$ неизолированные, то из (1) и (2) следует, что $x_v^1 = y_v^2 + d_H(v)$ и $x_v^2 = y_v^1 + d_H(v)$, а также $x_w^1 = y_w^2 - d_H(w)$ и $x_w^2 = y_w^1 - d_H(w)$. Ясно, что $d_H(v) = 0$ для изолированных вершин в H. Поэтому

$$z_S = \frac{x^1 - y^1}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{z^1 + z^2}{2} \in EP(\varphi - \omega),$$

что и доказывает теорему. ■

Несмотря на то, что во многих вычислительных алгоритмах для решения задач на сетях базы расширенного полиматроида в явном виде не используются, на самом деле в процессе их работы тоже определяется некоторое линейное упорядочение вершин, по которому порожденная база является оптимальным решением. Например, алгоритм [18] решения задачи минимального разреза определяет правильный порядок (legal ordering) вершин $G = (V, E)$ упорядочением вершин v по возрастанию значения $z_v = x_v - y_v$, т.е. на текущем шаге выбирается вершина v, для которой значение y_v максимальное, а x_v минимальное. Поэтому правильный порядок вершин можно определить за время $O(m)$. Однако, основываясь на теореме 1 и следующей простой лемме, для определения минимального разреза в неориентированном графе $G = (V, E)$ можно упорядочить вершины различными способами.

Лемма 1. Если $L = (S, \bar{S})$ — произвольное линейное упорядочение такое, что вершины $v \in S$ и $w \in \bar{S}$ удовлетворяют условию $v \prec_L w$, то $c(\delta(S)) = x(S) - y(S)$, где $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ — базы, порожденные по L.

Доказательство. Из определения функций $\varphi(S)$ и $\omega(S)$ следует, что $\varphi(S) - \omega(S) = c(\delta(S))$. Поэтому $x(S) - y(S) = \varphi(S) - \omega(S)$ для $L = (S, \bar{S})$. ■

Согласно леме 1 для определения $c(\delta(S))$ достаточно, чтобы $S \prec_L \bar{S}$ в линейном упорядочении L, т.е. вершины из S и $\bar{S}$ могут появляться в произвольном порядке внутри этих подмножеств. Такая простая идея, используемая во многих известных алгоритмах при решении задачи минимального разреза, заключается в том, что подмножества S и $\bar{S}$ индуцируют связные компоненты графа $G=(V,E)$. Легко показать, что это свойство неприменимо для задачи максимального разреза. Только на специальных графах можно определить нужный порядок просмотра вершин за полиномиальное время при решении задачи максимального разреза.

Для примера рассмотрим двудольный граф $H=(W,U,A)$ с неотрицательными весами ребер из A, где A — множество ребер, W и U — множества вершин доли графа. Допустим, что $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ аналогично определены относительно графа H. Пусть $d_H(v)$ — сумма весов на ребрах, инцидентных к вершине $v \in W \cup U$. Векторы x и y при $x_v=d_H(v)$ для $v \in W$, $x_u=0$ для $u \in U$ и $y_v=0$ для $v \in W$, $y_u=d_H(u)$ для $u \in U$ являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, порожденными по линейному упорядочению $L=(W,U)$. По определению этих баз сумма $\sum_{v \in W \cup U} |x_v - y_v|$ означает удвоенный вес максимального разреза, разделяющего множества W и U в графе H.

3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА

Определение максимального разреза в графе $G=(V,E)$ с единичными весами ребер особенно важно, поскольку любой эффективный алгоритм решения этой NP-трудной задачи может быть положен в основу метода решений других сложных задач на графах. В дальнейшем будем считать, что $c_e=1$ для всех ребер $e \in E$ или что $c_e=c>0$. Поэтому для произвольного $F \subseteq E$ под $c(F)$ будем понимать $|F|$.

Модель [17] этой задачи, сформулированная как задача максимизации специальной негладкой выпуклой функции на выпуклой оболочке баз полиматроида $P(\varphi)$, является следствием теоремы 1. Действительно, поскольку $x^1+x^2=d$ и $|x^1(\bar{S})+x^2(\bar{S})-d(\bar{S})|=|z_S(\bar{S})|$ для баз x^1 и x^2, рассмотренных в доказательстве теоремы 1, удвоенной мощностью максимального разреза в G с единичными весами ребер является $MaxCut_* = 2x^1(S)-d(S)+|2x^1(\bar{S})-d(\bar{S})|$. С учетом того, что выпуклая оболочка баз полиматроида $P(\varphi)$ задается многогранником $B(\varphi)=\{x; x \geq 0, x \in P(\varphi), x(V)=\varphi(V)\}$ [19, 22], нахождение максимального разреза в графе $G=(V,E)$ формулируется как следующая задача выпуклого программирования

$$MaxCut_* = \max \{f(x) = \sum_{v \in V} |2x_v - d_v|\} \tag{3}$$

при ограничениях

$$x \in B(\varphi). \tag{4}$$

В отличие от упомянутых во введении моделей, преимущество задачи (3), (4) состоит в вычислительной эффективности уже разработанных алгоритмов ее решения. Например, простой алгоритм $O(nm)$ [17] для определения базы из $B(\varphi)$ в качестве решения задачи (3), (4) является гриди алгоритмом, в процессе работы которого учитываются основные топологические свойства заданного графа в явном виде. Такая вычислительная эффективность на практике также является полезным инструментом для поиска приближенных решений классов задач реальной размерности. В общем случае точность найденного решения алгоритмом [17] можно повысить с помощью процедур исключения и включения или элементарного преобразования баз (см. далее), при описании которых будем использовать следующие обозначения:

$$f_+(x) = \sum_{v \in V_+(x)} (2x_v - d_v),$$

$$f_-(x) = \sum_{v \in V_-(x)} (d_v - 2x_v),$$

где $V_+(x) = \{v \in V; 2x_v - d_v > 0\}$ и $V_-(x) = \{v \in V; 2x_v - d_v \le 0\}$ для произвольной базы $x \in B(f)$. Вначале приведем некоторые полезные свойства задачи (3), (4). Следующая лемма позволяет сформулировать различные задачи, эквивалентные (3), (4), а также необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи максимального разреза.

Лемма 2. Для произвольного $x \in B(\varphi)$ имеем $f(x) = 2f_+(x) = 2f_-(x)$.

Доказательство. Из равенства

$$f_+(x) - f_-(x) = \sum_{v \in V} (2x_v - d_v) = 0$$

следует, что $f(x) = f_+(x) + f_-(x) + 0 = 2f_+(x)$, $f(x) = f_+(x) + f_-(x) - 0 = 2f_-(x)$. ■

Таким образом, $MaxCut_* = f_+(x^*) + f_-(x^*) = 2f_+(x^*) = 2f_-(x^*)$, где x^* — оптимальное решение задачи (3), (4).

Согласно утверждениям 1–3 произвольная база $z \in EP(\varphi - \omega)$ представима в виде $z = x - y = 2x - d$, где $x \in B(\varphi)$ и $y = d - x$. Рассмотрим вектор z^+ при $z_v^+ = \max\{z_v, 0\}$ для всех $v \in V$. Из этой леммы также следует, что задача $\max\{z^+(V) : z \in EP(\varphi - \omega)\}$ эквивалентна задаче (3), (4). Кроме этой задачи, можно сформулировать минимаксные отношения для задачи (3), (4). Например, двойственное равенство

$$\max\{f_+(x) : x \in B(\varphi)\} = |E| - \min\{x(V_-) + y(V_+), x \in B(\varphi), y = d - x\} \qquad (5)$$

также является следствием леммы 2.

Задачу, стоящую в правой части равенства (5), будем называть двойственной к задаче максимального разреза (3), (4). Кроме задачи (5), можно вывести различные варианты двойственной задачи. Для этого вначале определим вектор z^- при $z_v^- = \min\{z_v, 0\}$ для всех $v \in V$. Из леммы 2 следует, что, например, задача $\min\{z^-(V); z \in EP(\varphi - \omega)\}$ эквивалентна двойственной задаче (5).

Задача (3), (4) является частным случаем общей задачи максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве. В отличие от случая отыскания минимума, нахождение максимума выпуклой функции значительно более трудная задача, так как возможно, что некоторые допустимые решения доставляют локальный максимум. В общем случае информация о локальных максимумах, существование которых маловероятно, не помогает перейти к лучшей точке для продвижения к глобальному максимуму, что также свидетельствует о трудноразрешимости задачи. Впрочем, малая вероятность существования локальных максимумов в общем случае не означает их отсутствие. Предположим, что некоторые допустимые решения из $B(\varphi)$ являются точками локального максимума функции (3) относительно некоторой ее окрестности в евклидовой норме. Можно показать, что точки локальных максимумов лежат на грани многогранника $B(\varphi)$ размерности, не большей $n-2$. Для задачи (3), (4) покажем, что точки локальных максимумов являются одновременно точками глобальных максимумов целевой функции (3).

Теорема 2. В задаче (3), (4) все локальные максимумы являются одновременно глобальными максимумами.

Доказательство. Пусть $f(x^*)$ — глобальный максимум функции в точке $x^* \in B(\varphi)$ и $f(\bar{x})$ — локальный максимум в точке $\bar{x} \in B(\varphi)$. Рассмотрим случай, когда пересечения $V_+(x^*)$ и $V_+(\bar{x})$ являются пустым множеством. В этом случае получим, что $V_+(\bar{x}) = V_-(x^*)$, так как условие $V_-(x^*) \subset V_+(\bar{x})$ противоречит тому, что $f(x^*)$ — глобальный максимум. Следовательно, $f_+(\bar{x}) = f_-(x^*)$ согласно лемме 1 или $f(\bar{x}) = f(x^*)$, т.е. локальный и глобальный максимумы функции одинаковы. В случае $V_+(x^*) \subset V_+(\bar{x})$ локальный и глобальный максимумы функции $f(x)$ тоже совпадают по значению целевой функции. Поэтому рассмотрим случай, когда пересечение $V_+(x^*)$ и $V_+(\bar{x})$ — непустое множество и $V_+(x^*) \neq V_+(\bar{x})$. Если $\bar{x}$ является локальным максимумом выпуклой функции (4) на многограннике $B(\varphi)$, то

$$(g(\bar{x}), x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in B(\varphi), \tag{6}$$

где $g(\bar{x})$ — любой субградиент функции в точке $\bar{x} \in B(\varphi)$ [20]. Ясно, что вектор g, компоненты которого $g_v(\bar{x}) = 2$, если $2\bar{x}_v > d_v$, и $g_v(\bar{x}) = -2$, если $2\bar{x}_v < d_v$, а также $g_v(\bar{x}) = 0$, если $2\bar{x}_v = d_v$, является субградиентом функции (3).

Пусть $S_0 = V_+(x^*) \cap V_+(\bar{x})$, $T_0 = V_-(x^*) \cap V_-(\bar{x})$, $S = V_+(x^*) \setminus S_0$, $T = V_-(x^*) \setminus T_0$.

Во-первых, не нарушая общности, для вершин $v \in S_0$ и $v \in T_0$ согласно лемме 1 можно положить $\bar{x}_v = x_v^*$, т.е. $g_v(\bar{x})(x_v - \bar{x}_v) = 0$. Во-вторых, очевидно, что $f(x^*) = f(y^*)$ для $y^* = d - x^* \in B(\varphi)$. Поэтому

$$f(\bar{x}) - f(y^*) = f(\bar{x}) - f(x^*) = \sum_{v \in S} (d_v - 2\bar{x}_v - 2x_v^* + d_v) +$$

$$+ \sum_{v \in T} (2\bar{x}_v - d_v - d_v + 2x_v^*) = (-g(\bar{x}), y^* - \bar{x}) \geq 0,$$

где последнее равенство является результатом замены $d_v = x^* + y^*$ для всех вершин $v \in S$ и $v \in T$. Так как локальный максимум не может превышать глобального, из $f(\bar{x}) \geq f(y^*)$ следует, что $f(\bar{x}) = f(y^*)$. ■

Несмотря на этот результат, ввиду экспоненциального количества ограничений, задающих многогранник $B(\varphi)$, применение существующих алгоритмов негладкой оптимизации для решения задачи (3), (4) сопряжено с большими вычислительными трудностями, так как требуется кодировать каждое ограничение в некотором формате.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Часто на практике задачи поиска различных разрезов в неориентированных графах имеют линейные ограничения. Так, в случае задачи минимального разреза особенности ограничений позволяют успешно применять эффективные строго полиномиальные алгоритмы комбинаторной оптимизации. В случае задачи максимального разреза, несмотря на то, что число ограничений в (4) выражается экспоненциально от количества вершин графа, с учетом особенностей ограничений можно построить простой эффективный алгоритм на базе известных свойств полиматроидов. Например, простой полиномиальный алгоритм в [17] за полиномиальное время определяет точное решение задачи максимального разреза в полных и некоторых других графах с единичными весами на ребрах. Для повышения точности решения, полученного алгоритмом [17], требуется разработать алгоритм, осуществляющий переход от одной базы к другой с лучшим значением целевой функции (3). В следующей части статьи предложен один из таких алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barahona F., Grötschel M., Jünger M., Reinelt G. An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design. *Operations Research*. 1988. Vol. 36, N 3. P. 493–513.
2. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems. Miller R.E., Thatcher J.W., Bohlinger J.D. (Eds.). *Complexity of Computer Computations*. New York: Plenum Press, 1972. P. 85–103.
3. Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L. Some simplified *NP*-complete graph problems. *Theoret. Comput. Sci*. 1976. Vol. 1, Iss. 3. P. 237–267.
4. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: A guide to the theory of *NP*-completeness. New York: W.H. Freeman and Company, 1979.
5. Boros E., Hammer P.L. Pseudo-Boolean optimization. *Discrete Applied. Mathematics*. 2002. Vol. 123, Iss. 1–3. P. 155–225.
6. Bertoni A., Campadelli P., Grossi G. An approximation algorithm for the maximum cut problem and its experimental analysis. *Discrete Applied Mathematics*. 2001. Vol. 110, Iss. 1. P. 3–12.
7. Orlova G.I., Dorfman Y.G. Finding the maximal cut in a graph. *Engineering Cybernetics*. 1972. Vol. 10. P. 502–504.
8 Hadlock F.O. Finding a maximum cut of a planar graph in polynomial time. *SIAM Journal on Computing*. 1975. Vol. 4, Iss. 3. P. 221–225.
9. Shih K., Wu S., Kuo Y.S. Unifying maximum cut and minimum cut of a planar graph. *IEEE Transactions on Computers*. 1990. Vol. 39, Iss. 5. P. 694–697.
10. Grötschel M., Pulleyblank W.R. Weakly bipartite graphs and the max-cut problem. *Operat. Res. Lett*. 1981. Vol. 1, Iss. 1. P. 23–27.
11. Barahona F. The max-cut problem in graphs is not contractible to $K5$. *Operat. Res. Lett*. 1983. Vol. 2, Iss. 3. P. 107–111.
12. Brahim Chaourar. A linear time algorithm for a variant of the MAX CUT problem in series parallel graphs. 2017. Vol. 2017. Article ID 1267108. 4 p. https://doi.org/10.1155/2017/1267108.
13. Ben-Ameur W., Mahjoub A.R., Neto J. The maximum cut problem. In: Paradigms of combinatorial optimization. In Problems and New Approaches. Ch. 6. Paschos V.T. (Ed.). J. Wiley and Sons, USA, 2nd edition, 2014.
14. Poljak S., Tuza Z. Maximum cuts and large bipartite subgraphs. *American Mathematical Society*. 1995. Vol. 20. P. 181–244.
15. Goemans M.X., Williamson D.P. Improved approximation algorithms for MAX-CUT and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of ACM*. 1995. Vol. 42, N 6. P. 1115–1145.
16. Rendl F., Rinaldi G., Wiegele A. Solving MAX-CUT to optimality by intersecting semidefinite and polyhedral relaxations. *Math. Program*. Publ. Online: May 6, 2008. 33 p. URL:
17. Шарифов Ф.А. Нахождения максимального разреза гриди алгоритмом. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 5. С. 48–54.
18. Stoer M., Wagner F. A simple min cut algorithm. *Journal of ACM*. 1997. Vol. 44, N 4. P. 583–591.
19. Iwata S. Submodular function minimization. *Math. Program. Ser. A–B*. 2008. Vol. 112, N 1. P. 45–64.
20. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty M.C. Nonlinear programming: Theory and algorithms. New York: J. Wiley and Sons, 1979. 583 p.

Надійшла до редакції 10.07.2019

Ф.А. Шаріфов, Л.Ф. Гуляницький

РОЗРІЗИ В НЕОРІЄНТОВАНИХ ГРАФАХ. I

Анотація. Досліджено нові властивості розрізів у неорієнтованих графах, наведено різні моделі для задачі максимального розрізу на основі встановленої відповідності між розрізами в заданому графі і специфічними базами розширеного поліматроїда, асоційованого з цим графом. Для моделі, сформульованої як задача знаходження максимуму опуклої функції на компактній множині (розширеному поліматроїді), доведено, що локальні і глобальні максимуми збігаються за значенням цільової функції, тобто для розв'язання задачі максимального розрізу достатньо знайти базу розширеного поліматроїда як локальний або глобальний максимум цільової функції.

Ключові слова: графи, розрізи, опукла функція, спеціальні багатогранники.

F. Sharifov, L. Hulianytskyi

CUTS IN UNDIRECTED GRAPHS. I

Abstract. This part of the paper analyzes new properties of cuts in undirected graphs, presents various models for the maximum cut problem, based on the established correspondence between the cuts in this graph and the specific bases of the extended polymatroid associated with this graph. With respect to the model, formulated as the maximization of the convex function on the compact set (extended polymatroid), it was proved that the objective function has the same value at any local and global maximum, i.e., to solve the maximum cut problem, it needs to find a base of the extended polymatroid as a local or global maximum of the objective function.

Keywords: graphs, cuts, convex function, special polyhedra.

Шарифов Фирдовси Ахун-оглы,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: fasharifov@gmail.com.

Гуляницкий Леонид Федорович,
доктор техн. наук, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: lh_dar@hotmail.com.