DOI https://doi.org/10.15407/usim.2019.01.003
УДК 519.8

В.П. ГОРБУЛІН, д-р техн. наук, проф., академік НАН України,
віце-президент НАН України,
директор Національного інституту стратегічних досліджень
вул. Володимирська, 54, Київ-30, 01601, Україна,
horbulin@nas.gov.ua

Л.Ф. ГУЛЯНИЦЬКИЙ д-р техн. наук, проф., ст. науковий співробітник, зав. відділом,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
просп. Академіка Глушкова, 40, Київ, 03187, Україна,
leonhul.icyb@gmail.com

І.В. СЕРГІЄНКО, д-р фіз.-мат. наук, проф., академік НАН України, директор інституту
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
просп. Академіка Глушкова, 40, Київ, 03187, Україна,
incyb@incyb.kiev.ua

ПОСТАНОВКИ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОБЛЕМ ОПТИМІЗАЦІЇ МАРШРУТІВ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ З ДИНАМІЧНИМИ ДЕПО

Аналізуються проблеми оптимізації маршрутів групи безпілотних літальних апаратів, що діють як команда, перед якою поставлено завдання обстежити або обслужити кілька об'єктів. Вперше розглянуто випадок, коли ці апарати починають і завершують свій маршрут на борту літака-носія. Запропоновано математичну модель однієї з таких проблем і підходи до розв'язування, орієнтовані на застосування методів локального пошуку.

Ключові слова: *безпілотні літальні апарати, оптимізація маршрутів, динамічні депо, математична модель, комбінаторна оптимізація.*

Вступ

В останнє десятиліття чітко визначилася тенденція до розширення сфер використання безпілотних апаратів, зокрема, безпілотних літальних апаратів (БПЛА). Світовий досвід розвитку безпілотної авіації, перш за все, у таких розвинених країнах, як США, Німеччина, Ізраїль, показує, що БПЛА в найближчі 10—15 років зможуть виконувати більшість завдань, які здійснюються нині пілотованими засобами. Уже зараз БПЛА використовуються для контролю технічного стану, безпеки та процесу функціонування різних об'єктів і систем, зокрема, в екології, сільському чи лісовому господарстві, на залізничному транспорті, при організації морських пошуково-рятувальних операцій [1, 2]. Все більш суттєву роль БПЛА відіграють і у військових застосуваннях, один із таких аспектів можливого застосування буде розглянуто далі.

Крім задач маршрутизації літальних апаратів (ЛА), що стартують з землі, останнім часом набувають актуальності проблеми маршрутизації у випадку, коли ЛА (БПЛА чи крилаті ракети) запускаються зі спеціального літака-носія, маршрут якого прокладається з урахуванням можливого застосування противником засобів протиповітряної оборони чи літаківвинищувачів — це і стане предметом дослідження.

Важливим аспектом, від якого залежить ефективність використання групи об'єднаних в мережу БПЛА, є питання вироблення стратегії кооперативної взаємодії при вирішенні поставлених завдань, що дає змогу суттєво підвищити ефективність використання такої групи взаємодіючих БПЛА у порівнянні з їх автономним застосуванням [1].

Загальна проблематика оптимізації маршрутів ЛА з декількома депо

Розглядаються проблеми пошуку оптимальних маршрутів для групи спеціальних ЛА, зокрема, БПЛА. Вони полягають у тому, що перед заданою групою ЛА, які можуть стартувати з різних точок пуску та мати можливість закінчувати маршрут в різних місцях (депо), стоїть завдання облетіти низку заданих об'єктів (точок на місцевості) з мінімізацією сумарної довжини маршрутів або тривалості польотів за умов, що кожен об'єкт відвідується одним і лише одним ЛА і всі об'єкти мають бути відвіданими. При цьому часто слід враховувати ще й додаткові обмежуючі умови (дальність польоту без підзаряджання чи дозаправлення, вантажопідйомність, мінімальний радіус розвороту, погодні умови тощо) [1—4].

У ряді випадків постановка таких проблем є близькою до відомого класу задач маршрутизації транспортних засобів (МТЗ) [5, 6], зокрема, з багатьма депо [7]. Враховуючи це, в подальшому інколи вживатиметься і відповідна термінологія.

Особливістю розглянутих проблем буде те, що як старти ЛА, так і завершення їх маршрутів здійснюватимуться з використанням літака-носія.

У загальному випадку вирішення проблеми маршрутизації групи ЛА може бути природним чином розбите на три етапи:

- Розбиття множини об'єктів на диз'юнктні підмножини, за кожною з яких закріплюється один ЛА.
- Побудова маршруту кожного ЛА з оптимізацією його довжини.
- Уточнення маршрутів за необхідності (при несуттєвих змінах обстановки, врахування погодних умов у конкретний період тощо).

Зауважимо, що за певних підходів (наприклад, із застосуванням оптимізації мурашиними колоніями) перший та другий етапи об'єднуються в одну оптимізаційну задачу [8].

Отже, маємо літак-носій, з якого можуть стартувати кілька спеціальних ЛА (БПЛА, крилаті ракети з управлінням), які після виконання завдань можуть бути прийняті на борт літака-носія у спеціальний спосіб.

Оскільки відомі параметри/характеристики літака-носія, моменти пуску чи приймання ЛА на борт можуть характеризуватися як часом, що минув від зльоту, так і місцями на маршруті.

Спеціальні ЛА можуть використовуватися для виконання завдань двох таких типів: обстеження заданої множини об'єктів (розвідка) чи відвідування об'єктів з їх обслуговуванням. Відповідно, це породжує певні математичні постановки спеціальних задач оптимізації.

Проблеми обстеження

Серед задач пошуку оптимальних маршрутів ЛА, що породжуються проблемами обстеження, виділимо такі (для кращого розуміння суті проблем обмежуючі умови поки не описуватимуться).

Задача 1. Літак-носій летить заданим маршрутом, при цьому час/місце старту та час/місце приймання кожного ЛА відомі, а кожний ЛА має свої характеристики ресурсів.

Математична постановка задачі зводиться до розширеної постановки задачі МТЗ з багатьма депо [5—7], де роль депо виконує літак-носій.

Задача 2. Вважається, що маршрут літака-носія сформовано повністю. Також вважаються заданими:

- часове вікно (відрізок маршруту), в межах якого дозволено проводити пуски ЛА та приймання їх на борт;
- мінімально можливий часовий інтервал між пусками;

▪ часове вікно, яке визначає початок і завершення процесу приймання ЛА на борт;

▪ мінімально можливий часовий інтервал між прийманням двох ЛА.

Задача 3. Разом із оптимізацією маршрутів ЛА розробити і траєкторію польоту літака-носія з урахуванням його характеристик (дальність польоту, швидкість, граничні кути повороту тощо).

Формалізація цієї проблеми призводить до складних динамічних задач неперервної оптимізації, розв’язування яких у межах часових ресурсів, наявних у реальних ситуаціях, не видається можливим. У той же час, врахування особливостей процесу планування маршрутів з використанням літака-носія дає змогу розробляти математичні моделі, придатні для практичного використання, про що піде мова далі.

Проблеми обслуговування

Постановка проблем обходу об’єктів з обслуговуванням вимагає більш ускладненого опису та конкретизації умов виконання завдань.

У загальному вигляді можна подати таку проблему.

Задано:

▪ множину об’єктів для обслуговування;

▪ пріоритетність (важливість) об’єктів;

▪ потреби кожного об’єкта;

▪ характеристики утруднення доставки товарів (ймовірності недосягнення чи перехоплення, завади);

▪ групу ЛА із заданими характеристиками.

Критерієм виступає оцінка максимального ефекту від обслуговування з врахуванням наявних обмежень.

Крім задач маршрутизації групи БПЛА, останнім часом виникла задача маршрутизації групи крилатих ракет, яку відправляють у політ з літака-носія, що знаходиться на безпечній відстані від засобів протиповітряної оборони або винищувачів супротивника. Розробник таких систем — фірма *Dynetics* — називає їх гремлінгами [2—4]. На відміну від БПЛА, який може нести декілька ракет або бомб, багаторазова крилата ракета (гремлінг) має на борту засоби ураження і може застосовуватись для знищення декількох цілей. Основним застосуванням гремлінгів є атака об’єкта групою з декількох (зазвичай, чотирьох) гремлінгів, які виконують різні функції: ураження цілі, наведення, навігація, ретрансляція команд керування, взаємодія з БПЛА інших типів або військовим літаком, пілотованим людиною.

Постановка спеціальної задачі маршрутизації з динамічними депо

Для адаптації постановки задачі до умов практики зробимо припущення: приймання ЛА може здійснюватися в декількох заданих територіально зонах — виділених дільниць траєкторії літака-носія. Припускається також, що характеристики кожної зони вибираються так, що під час польоту літака-носія в конкретній зоні можливе приймання на борт заданої кількості ЛА: в такій зоні можуть завершувати свій маршрут всі або частина ЛА. Тобто зона — це відрізок маршруту літака-носія (чи часове вікно, за яким розраховується відповідний відрізок маршруту), під час проходження якого літак-носій готовий і здатний приймати один або кілька ЛА. Кожну зону будемо ідентифікувати її центроїдом. Отже, маршрут кожного з ЛА повинен закінчуватися в одній із таких зон, але конкретна зона для конкретного ЛА не вказується.

Цю проблему назвемо задачею маршрутизації з динамічними депо. Кількість місць старту ЛА може перевищувати кількість самих ЛА — це створює додаткові можливості для вибору місць (чи моментів) старту.

Також відзначимо, що в процесі розв’язування задачі маршрутизації можна оптимізувати також і кількість застосованих ЛА. Основну задачу дослідження сформулюємо так.

Задача 4. За умови використання літака-носія, наявності можливих зон приймання ЛА і місць або моментів їх старту та завершення маршрутів лише в одній з виділених зон на маршруті літака-носія слід визначити як маршрути ЛА з оптимізацією сумарної довжини (тривалості польотів) та їх кількості, так і місця (зони) їх приймання.

Тобто, в результаті розв'язування задачі в певному сенсі формується і маршрут літаканосія шляхом задання вузлових точок — місць старту та центроїдів зон приймання. Як відзначалося, в одній зоні може завершуватися декілька маршрутів БПЛА. Зауважимо, що у близькій постановці задачі з багатьма депо [8], ключовою відмінністю є те, що кожне депо локалізовано на місцевості і може використовуватися як для відправлення, так і для приймання БПЛА. Дослідимо сформульовану проблему.

Цілочислова математична модель проблеми

Вважаємо заданими: m — загальна кількість ЛА, b — кількість місць старту ($b \geq m$); e — кількість зон приймання ЛА на літак-носій ($e \geq 1$); n — кількість об'єктів, які слід відвідати; R^k — польотний ресурс k-го ЛА, $k = 1, ..., m$.

Підкреслимо, що кількість місць старту ЛА не може бути меншою m, а в разі, коли $m > n$, частина з них не буде використана.

Розглянемо зважений граф $G = (Y, U)$, де вершини Y відповідають об'єктам, місцям старту та зонам приймання, тобто $\|Y\| = n + b + e$, задавши таку їх нумерацію: від одиниці до n — об'єкти, від $n + 1$ до $n + b$ — місця старту, а від $n + b + 1$ до $n + b + e$ — зони (їх центроїди). Позначимо $V = \{1,...,n\}$ — множина вершин, які відповідають об'єктам, $B = \{n+1, ..., n+b\}$ — множина вершин, які відповідають місцям старту, $E = \{n+b+1, ..., n+b+e\}$ — вершини, що відповідають зонам приймання. Зрозуміло, що для вершин з множини B матимемо лише вихідні дуги, а для вершин з E — лише вхідні.

Для подання розв'язку введемо матрицю $X = x_{ij}$ розмірності $m \times (n + b + e)$, де $x_{ij} \in \{0, 1\}$, яка складається з трьох блоків. У перший блок включено стовпчики від одного до n, у другий — від $n + 1$ до $n + b$, у третій — від $n + b + 1$ до $n + b + e$, а рядки будуть відповідати номерам ЛА. Ця матриця буде описувати фактично етап розбиття, на якому кожному ЛА приписуються ті об'єкти, які він має відвідати, разом з одним із місць старту та місцем завершення маршруту.

Нехай c_{ij}, $c_{ij} > 0$, $i \neq j$ — вага таких ребер $(i, j) \in U$, що $(i, j) \notin B \times B$, $(i, j) \notin E \times E$ та $(i, j) \notin B \times E$. Позначимо δ_j максимальну кількість ЛА, які можуть бути прийняті в зоні j, $j = 1, ..., e$.

Задача розбиття (як окремий етап чи складова загального процесу розв'язування) може бути подана так.

Обмежуючи умови:

$$\sum_{j=n+1}^{n+b} x_{ij} \leq 1, \; i = 1,...,m; \tag{1}$$

$$\sum_{j=n+b+1}^{n+b+e} x_{ij} \leq 1, \; i = 1,...,m; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \; j = 1,...,n; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1, \; j = n+1,...,n+b; \tag{4}$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+b} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = m; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \delta_{j-n-b}, \; j = n+b+1,...,n+b+e. \tag{6}$$

Задача полягає в пошуку такого розв'язку X, для якого

$$F(X) \equiv \sum_{i=1}^{m} L^i(\overline{x_i}) \to \min, \tag{7}$$

за умов (1)—(6), де $\overline{x}_i$ — це i-й вектор-рядок матриці X, а $L^i(\overline{x_i})$ — довжина маршруту i-го застосованого ЛА, як розв'язку задачі комівояжера, який визначається вершинами, що відповідають ненульовим компонентам вектора $\overline{x}_i$, починаючи з певного стартового місця $s \in B : x_{is} = 1$ і закінчуючи зоною $f \in E : x_{if} = 1$. Зрозуміло, що для незадіяних ЛА відповідний вектор-рядок має всі нульові координати.

Тобто матриця X, як елемент простору розв'язків задачі (1)—(7), у компактному вигляді може бути подана так:

$$X = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_m \end{pmatrix}, \text{ де } \overline{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{i,n+b+e}).$$

Умова (1) визначає, що кожен *i*-й ЛА стартує лише з одного з можливих місць старту (або момент часу, який і визначає таке місце) на маршруті літака-носія, якщо ж деякий ЛА не задіяний, то відповідний рядок стає нульовим. Аналогічно, формула (2) описує ситуацію, що до конкретного центроїда від об'єктів або веде одне і лише одне ребро графа *G*, або — жодного. Умова (3) визначає, що кожен об'єкт $j \in V$ відвідується лише одним ЛА. Умова (4) — що з кожного місця або стартує один ЛА, або ж це місце не використане, а разом з умовою (5) — що кількість задіяних місць збігається з кількістю ЛА. Можливість літака-носія приймати в кожній зоні $j \in E$ (в іншому трактуванні — у певний проміжок часу) не більше, ніж δ_j ЛА, відображена у формулі (6).

Зауважимо, що не виключаються випадки, коли в одній зоні (або в проміжок часу) може прийматися лише один ЛА, тоді $\delta_j = 1$ для відповідної зони, або ж всі ЛА можуть бути прийняті в одній зоні — в цьому разі матимемо $e = 1$, а $\delta_1 = m$.

Комбінаторна модель задачі

Враховуючи обчислювальну складність проблеми [9], більш придатною для розв'язування буде подання її у вигляді спеціальної задачі комбінаторної оптимізації. Під задачею комбінаторної оптимізації розуміємо пошук оптимуму цільової функції, визначеної у локально скінченому просторі розв'язків [10].

Як зазначалося, вершини графа *G* задачі пронумеровано спеціальним чином, що дає підстави оперувати їх номерами як числами — це дає можливість розв'язки задачі подати у вигляді такої матриці:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{k_1-1}^1, y_{k_1}^1, y_{k_1+1}^1, \ldots, y_k^1 \\ \vdots \\ y_1^m, y_2^m, \ldots, y_{k_m-1}^m, y_{k_m}^m, y_{k_m+1}^m, \ldots, y_k^m \end{pmatrix},$$

де $y_1^i \in B, y_{k_i}^i \in E$, якщо *i*-й ЛА має завдання відвідати хоча б один об'єкт, та в іншому разі $y_1^i = 0,\ y_{k_i}^i = -1$; $y_j^i \in V$, $j = 2, \ldots, k_i - 1$, якщо *i*-й ЛА повинен відвідати ці вершини; $k = \max_{1 \le i \le m} \{k_i\}$; $y_j^i = 0,\ \ k_i < j \le k$, якщо для деякого *i* маємо $k_i < k$; $i = 1, \ldots, m$.

Отже, кількість вершин, які відповідають об'єктам і приписуються до задіяного *i*-го ЛА, дорівнює $k_i - 2$.

При розробці та програмній реалізації деяких алгоритмів більш зручним буде подання розв'язку у вигляді вектора *X*, у якому почергово відображаються рядки матриці *Y* (інформативні елементи), а елементи $y_{k_i}^i \in E$ беруться зі знаком мінус, позначаючи у такий спосіб кінець списку номерів вершин, які належать до *i*-го ЛА, $i = 1, \ldots, m$, якщо він є у розв'язку; в іншому разі, як зазначалося, рядок матриці *Y* матиме вигляд 0, -1, 0, ..., 0.

Зазначимо, що іноді подібний вектор містить лише номери вершин, а їх розподіл між маршрутами ЛА описується додатковим вектором.

Отже, розв'язок можна записати так:

$$X = (\Phi^1, \ldots, \Phi^m),$$

де фрагмент Φ^i, $i = 1, \ldots, m$, може мати два варіанти подання: $\Phi^i = (b^i, v_1^i, \ldots, v_{k_i-2}^i, -e^i)$, якщо *i*-й ЛА має завдання відвідати вершини $v_j^i \in V$, $j = 1, \ldots, k_i - 2$, починаючи з вершини $b^i \in B$ і закінчуючи вершиною $e^i \in E$, або ж $\Phi^i = (0, -1)$, якщо *i*-й ЛА не бере участі у варіанті розв'язку — назвемо такий фрагмент виродженим.

Таким чином, фрагмент вектора від першої компоненти (яка відповідає вершині з *B* або дорівнює нулю) до першої від'ємної компоненти буде належати до першого ЛА, наступний такий фрагмент до першої ж від'ємної компоненти — до другого ЛА і т.д.

Позначимо L^i множину компонентів вектора *X*, що утворюють *i*-й фрагмент, $i = 1, \ldots, m$. За побудовою кожна така множина або містить один елемент з *B* та один, взятий зі знаком мінус, з множини *E*, або ж є множиною {0, −1} — для вироджених фрагментів.

Тоді цільову функцію задачі можна подати так:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} T(L^i), \tag{8}$$

де $T(L^i)$ для невироджених фрагментів — це розв'язок розімкнутої задачі комівояжера, побудованої на вершинах множини L^i, маршрути у якому починаються з наявної в L^i вершини з B, закінчуються — у відповідній вершині з E, причому порядок вершин у векторі X задає порядок їх обходу в маршруті; для вироджених фрагментів, зрозуміло, $T(L^i) = 0$.

Позначимо Ω множину всіх можливих векторів зазначеного виду: $\Omega = \{X\}$.

Досліджувана задача, яку названо задачею маршрутизації з динамічними депо, в комбінаторній формі може бути подана так:
знайти такий вектор $X_* \in \Omega$, що

$$X_* = \arg\min_{X \in \Omega} f(X) \tag{9}$$

за обмежень

$$T(L^i) \le R^i, \tag{10}$$

де L^i — множина, сформована у зазначений вище спосіб, $i = 1, ..., m$.

У багатьох алгоритмах комбінаторної оптимізації, на основі яких видається можливим розробка алгоритмів розв'язування сформульованої задачі, використовується поняття сусідства у просторі розв'язків, зокрема, околів [11].

В даному випадку, якщо є деякий елемент $X \in \Omega$, для породження сусідніх до нього варіантів можна використати процедури, засновані на таких діях, які зручніше проілюструвати з використанням матриці Y, описаної вище:

1) Обмін між собою ненульовими елементами першого стовпчика між двома рядками (відповідає зміні місця старту двох ЛА).

2) Обмін між собою від'ємними елементами двох рядків (відповідає зміні зон для приймання між двома ЛА).

3) Обмін між собою двох елементів певного рядка матриці, які відповідають вершинам V.

4) Обмін між собою двох елементів, що відповідають вершинам із V і розташовані в різних рядках матриці; при цьому слід окремо опрацьовувати випадки, коли виникають або використовуються вироджені фрагменти.

5) Переміщення елемента одного рядка, який відповідає вершині з V, в інший рядок шляхом вставляння в довільне місце між першим елементом і від'ємним елементом.

У п. 4 при можливому переміщенні вершини з V між рядками можуть виникнути випадки, коли:

а) виникає вироджений фрагмент (якщо така вершина була єдиною в рядку, з якого переміщується);

б) вставляння здійснюється у вироджений фрагмент; у першому випадку обнуляється місце старту і замість номера зони приймання заноситься мінус одиниця як фіктивний номер.

У випадку *б*) для остаточного формування фрагмента слід також розглянути всі можливі варіанти вставляння місць старту, а також номерів зон приймання, які можуть це зробити.

Висновки

Виділено два основних типи проблем формування маршрутів ЛА при обстеженні або обслуговуванні заданої множини пунктів на місцевості за наявності групи ЛА, що можуть стартувати та завершувати маршрути в різних місцях. Вперше розглянуто проблему маршрутизації, у якій ЛА стартують з літака-носія і на ньому ж (або подібному) завершують маршрут.

На основі реалістичних припущень, що відображають технічні аспекти процесу, запропоновано зведення цієї проблеми до спеціальної задачі комбінаторної оптимізації, яка названа задачею маршрутизації з динамічними депо. Обговорено можливі підходи до її розв'язування на основі використання околів спеціального типу.

Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку ефективних алгоритмів розв'язування сформульованих задач оптимізації маршрутів ЛА з використанням літака-носія. Цікавим розвитком розглянутих задач є проблеми кооперації і оптимізації маршрутів команди, що складається як з БПЛА, так і наземних роботизованих систем [12].

REFERENCES

1. *Ponda, S.S.*, *Johnson, L.B.*, *Geramifard, A.*, *How, J.P.*, 2015. "Cooperative mission planning for multi-UAV teams". In Handbook of Unmanned Aerial Vehicles. Dordrecht: Springer, pp. 1447–1490.
2. *Austin, R., 2010.* Unmanned Aircraft Systems. UAVs Design, Development And Deployment. West Sussex: John Wiley and Sons, 365 p.
3. *Tsourdos, A*., White, B., Shanmugavel, M., 2011. Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. West Sussex: John Wiley and Sons, 212 p.
4. *Shima, T*., Rasmussen, S., 2009. UAV Cooperative Decision and Control. Challenges and Practical Approaches. Philadelphia: SIAM, 186 p.
5. *Toth, P*., *Vigo, D*., 2014. (eds.). Vehicle routing: problems, methods, and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 462 p.
6. *Braekers, K*., *Ramaekers, K*., *Nieuwenhuyse, I.V*., 2015. "The Vehicle Routing Problem: Stateof the Art Classification and Review". Computers & Industrial Engineering, pp. 300–313.
7. *Karakatič, S*., *Podgorelec, V*., 2015. "A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem". Applied Soft Computing, 27, pp. 519–532.
8. *Hulianytskyi, L.F.*, *Rybalchenko, O.V.*, 2018. "“Formalizatsiya ta rozv’yazuvannya odnoho typu zadach marshrutyzatsiyi BPLA”. Teoriya optymal'nykh rishen, 17, pp. 107–114. (In Ukrainian).
9. *Serhiyenko, I.V.,* 2010. Metody optymizatsiyi ta systemnoho analizu dlya zadach transobchyslyuval'noyi skladnosti. K.: Akademperiodyka, 318 p. (In Ukrainian).
10. *Hulianytskyi, L.F.*, *Riasna, I.I.,* 2017. "Formalization and classification of combinatorial optimization problems". In Optimization Methods and Applications (eds. Butenko S., Pardalos P. M., Shylo V.). Cham: Springer International Publishing AG, pp. 239–250.
11. *Hulianytskyi, L.F., Mulesa, O.Yu.,* 2016. Prykladni metody kombinatornoyi optymizatsiyi. K.: Vyd.-polihraf. tsentr “Kyyivs'kyy universytet”, 142 p. (In Ukrainian).
12. *Arbanas, B. et al., 2018.* "Decentralized planning and control for UAV–UGV cooperative teams". Autonomous Robots, 42 (8), pp.1601–1618.

Received 27.11.2018

V.P. Horbulin, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine,
First Vice-President of the National Academy of Sciences of Ukraine,
54 Volodymyrska Str., Kyiv-30, 01601, Ukraine,
horbulin@nas.gov.ua

L.F. Hulianytskyi, Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of Department V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine,
40 Acad. Glushkova Ave., 03180, Kyiv, Ukraine,
leonhul.icyb@gmail.com

I.V. Sergienko, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Director V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine,
40 Acad. Glushkova Ave., 03180, Kyiv, Ukraine,
incyb@incyb.kiev.ua

FORMULATIONS AND MATHEMATICAL MODELS OF THE OPTIMIZING ROUTES PROBLEMS FOR AIRCRAFT WITH DYNAMIC DEPOTS

Introduction. In recent years there has been a tendency to expand the use of unmanned vehicles, in particular, unmanned aerial vehicles (UAVs). In addition to the tasks of routing the aircraft launching from the ground, the problem of routing has recently become topical for the aircraft (UAVs or cruise missiles) that are launched from a special aircraft carrier, the route of which is laid subject to possible restrictions. The problems of finding the optimal routes for a special aircraft group, in particular, UAVs, which can start and complete the route on an aircraft carrier, are considered.

Purpose. Analysis and formalization of routing problems of the specified type.

Methods. Mathematical models development to find the optimal routes for the aircraft using an aircraft carrier, that are focused on the use of combinatorial optimization methods.

Results. A new mathematical model has been developed for the problems where a given aircraft group, that can start from different launch points and has the ability to complete the route in different places of the aircraft carrier trajectory, has the task to fly over a number of specified objects (points on the ground) with minimizing the total route lengths or flight duration, provided that each object is visited by one and only one aircraft and all objects must be visited.

Conclusion. For the first time the problem of routing is considered for the case when aircraft start from an aircraft carrier and finish the route on it. Based on realistic assumptions reflecting the technical aspects of the process, the formalization of this problem is proposed as a special combinatorial optimization problem, which is called the routing problem with dynamic depots. The possible approaches to its solution based on the using the neighborhoods of a special type are discussed.

Keywords: *unmanned aerial vehicles, route optimization, dynamic depots, mathematical model, combinatorial optimization*.

В.П. Горбулин, д-р техн. наук, проф., академик НАН Украины, вице-президент НАН Украины,
директор Национального института стратегических исследований,
ул. Владимирская, 54, Киев-30, 01601, Украина,
horbulin@nas.gov.ua

Л.Ф. Гуляницкий, д-р техн. наук, проф., ст. научный сотрудник, зав. отделом,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины,
просп. Академика Глушкова, 40, Киев, 03187, Украина,
leonhul.icyb@gmail.com

И.В. Сергиенко, д-р физ.-мат. наук, проф., академик НАН Украины, директор института,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины,
просп. Академика Глушкова, 40, Киев, 03187, Украина,
incyb@incyb.kiev.ua

ПОСТАНОВКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОБЛЕМ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ДЕПО

Введение. В последнее десятилетие четко обозначилась тенденция к расширению сфер использования беспилотных аппаратов, в частности, беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Кроме задач маршрутизации летательных аппаратов (ЛА), стартующих с земли, приобретают актуальность проблемы маршрутизации в случае, когда летательные аппараты (БПЛА или крылатые ракеты) запускаются со специального самолета-носителя, маршрут которого прокладывается с учетом возможных ограничений. Рассматриваются проблемы поиска оптимальных маршрутов для группы специальных ЛА, в частности, БПЛА, которые могут стартовать и завершать маршрут на самолете-носителе.

Цель статьи – анализ и формализация задач маршрутизации указанного типа.

Методика. Разработка математических моделей проблем оптимизации поиска оптимальных маршрутов ЛА, выполняющих задачи с использованием самолета-носителя, ориентированных на применение методов комбинаторной оптимизации.

Результат. Разработана новая математическая модель проблем, заключающихся в том, что перед заданной группой ЛА, которые могут стартовать с разных точек пуска и имеют возможность заканчивать маршрут в разных местах траектории самолета-носителя, стоит задача облететь ряд заданных объектов (точек на местности) с минимизацией суммарной длины маршрутов или длительности полетов при условии, что каждый объект посещается одним и только одним ЛА и все объекты должны быть посещаемыми.

Выводы. Впервые рассмотрена проблема маршрутизации, в которой ЛА стартуют с самолета-носителя и на нем же завершают маршрут. На основе реалистичных предположений, отражающих технические аспекты процесса, предложена формализация этой проблемы в виде специальной задачи комбинаторной оптимизации, которая названа задачей маршрутизации с динамическими депо. Обсуждены возможные подходы к ее решению на основе использования окрестностей специального типа.

Ключевые слова: *беспилотные летательные аппараты, оптимизация маршрутов, динамические депо, математическая модель, комбинаторная оптимизация.*